Esercitazione # 6

DUE MEDIE CON VARIANZE NOTE:

Esercizio # 1

Le ditte A e B producono sfere luminose. Una volta attivata la reazione chimica che rende luminosa una di queste sfere, la sua durata, misurata in ore, è descritta da una v.a. normale la cui varianza è nota e dipende dal processo produttivo impiegato da ciascuna ditta: nel caso delle sfere prodotte dalla ditta A si ha $\sigma_A^2 = 9$, nel caso delle sfere prodotte dalla ditta B si ha $\sigma_B^2 = 25$. La ditta A ha modificato il processo produttivo per aumentare la durata delle proprie sfere ed ora sta progettando una campagna pubblicitaria comparativa nella quale intende affermare che la durata delle proprie sfere luminose è superiore a quella della ditta rivale B; tuttavia, ritenendo particolarmente sconveniente fare erroneamente un'affermazione di questo tipo, decide di sottoporre prima a test l'ipotesi auspicata ($\mu_A > \mu_B$). Vengono pertanto esaminati un campione casuale di $n_A = 35$ sfere dalla ditta A ed un campione casuale $n_B = 25$ sfere dalla ditta B. I dati campionari forniscono un p-value pari a 0.08.

a) Fissato il livello di significatività al 5% si tragga una conclusione circa l'opportunità di avviare la campagna comparativa.

b) Usando uno stimatore non distorto, si fornisca una stima della differenza fra la durata media dei due tipi di sfera.

c) Usando un intervallo di confidenza 0.95, si fornisca una stima della differenza fra la durata media dei due tipi di sfera.

d) Si calcoli quanto dovrebbe valere n_A per ridurre l'errore nell'intervallo di confidenza calcolato in d) a due ore.

Soluzione: Riassumiamo le informazioni fornite dall'esercizio:

Ditta A:	$\sigma_A^2 = 9$	$n_A = 35$
Ditta B:	$\sigma_B^2 = 25$	$n_B = 25$

Vogliamo testare le ipotesi: $H_0 : \mu_A = \mu_B$ vs $H_1 : \mu_A > \mu_B$; $p - value = 0.08$.

a) Dato $\alpha = 0.05 < p - value$ non abbiamo evidenze nei dati che portano a rifiutare H_0.

b) Uno stimatore non distorto per $\mu_A - \mu_B$ è dato da: $\overline{X}_A - \overline{X}_B$. Per ottenerne la stima dobbiamo risalire al valore di questa differenza utilizzando le informazioni date.

$$p - value = P(Z > z_0) = 1 - \Phi(z_0) = 0.08$$

quindi $z_0 = 1.41$ da cui abbiamo:

$$z_0 = \frac{\overline{X}_A - \overline{X}_B}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}} = 1.42$$

Perciò otteniamo $\overline{X}_A - \overline{X}_B = 1.58$.

c) L'intervallo di confidenza al 95% è dato da:

$$\overline{X}_A - \overline{X}_B \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}}$$

$$1.58 \pm 2.197$$

$$(-0.617; 3.777)$$

d) $z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{n_A} + \frac{\sigma_B^2}{n_B}} = 2 = 1.96\sqrt{\frac{9}{n_A} + \frac{25}{25}}$ quindi ricaviamo $n_A = 219$.

DUE MEDIE CON VARIANZE IGNOTE:

Esercizio # 2

Un campione di 150 lampadine della marca A ha mostrato un tempo di vita medio di 1400 h ed una deviazione standard campionaria di 120 h. Un campione di 100 lampadine della marca B ha mostrato un tempo di vita medio di 1200 h ed una deviazione standard campionaria di 80 h.

a) Trovate l'intervallo di confidenza di livello 99% per la differenza dei tempi di vita medi di tutte le lampadine delle marche A e B.

b) Possiamo concludere che c'è differenza tra i tempi di vita medi delle due marche di lampadine al livello di significatività 0.01?

c) Provare l'ipotesi che le lampadine della fabbrica B sono superiori a quelle della fabbrica A usando un livello di significatività dello 0.01.

d) Spiegate la differenza tra ciò che si è chiesto in c) e in b). Si può dire che i risultati del punto c) contraddicono quelli del punto b)?

Soluzione: Riassumiamo le informazioni fornite dall'esercizio:

Lampadine A:	$\overline{X}_A = 1400$	$s_A = 120$	$n_A = 150$
Lampadine B:	$\overline{X}_B = 1200$	$s_B = 80$	$n_B = 100$

a) L'intervallo di confidenza per $\mu_A - \mu_B$ di livello 99% è dato da:

$$\overline{X}_A - \overline{X}_B \pm t_{\alpha/2,\nu}\sqrt{\frac{s_A^2}{n_A} + \frac{s_B^2}{n_B}}$$

dove $\nu = \frac{(S_A^2/n_A+S_B^2/n_B)^2}{\frac{(S_A^2/n_A)^2}{n_A+1}+\frac{(S_B^2/n_B)^2}{n_B+1}} - 2 = 250$ e $t_{0.005,250} = 2.617$.

$$1400 - 1200 \pm 2.617\sqrt{\frac{120^2}{150} + \frac{80^2}{100}}$$

$$200 \pm 33.1$$

$$(166.9;\ 233.1)$$

Possiamo essere confidenti al 99% che l'intervallo (167; 233) catturi il vero valore della differenza tra i tempi di vita medi delle lampadine di marca A e B.

b) Vogliamo testare le seguenti ipotesi:

$$H_0 : \mu_A = \mu_B \quad vs \quad H_1 : \mu_A \neq \mu_B$$

Possiamo rispondere alla domanda utilizzando il risultato ottenuto nel punto a). Infatti siccome 0 non rientra nell'intervallo di confidenza di livello 99%, possiamo allora concludere che i dati forniscono evidenze per rifiutare l'ipotesi che i tempi di vita media delle 2 marche coincidono, al livello di significatività 0.01.

c) Vogliamo testare le seguenti ipotesi:

$$H_0 : \mu_A = \mu_B \quad vs \quad H_1 : \mu_A < \mu_B$$

che equivale alle seguenti:

$$H_0 : \mu_A - \mu_B = 0 \quad vs \quad H_1 : \mu_A - \mu_B < 0$$

Costruiamo il test sulla base della statistica:

$$t_0 = \frac{\overline{X}_A - \overline{X}_B}{\sqrt{\frac{s_A^2}{n_A} + \frac{s_B^2}{n_B}}} \overset{H_0}{\sim} t_\nu$$

e rifiutiamo H_0 se $t_0 < -t_{\alpha,\nu}$.

I gradi di libertà ν sono già stati calcolati nel punto a) è sono 250.

Nel nostro caso abbiamo

$$t_0 = \frac{1400 - 1200}{\sqrt{\frac{120^2}{150} + \frac{80^2}{100}}} = 15.81$$

dato che $-t_{0.01,250} = -2.33 < t_0 = 15.81$ concludiamo che nei dati non ci sono evidenze sufficienti per rifiutare H_0. Calcoliamo anche il p-value:

$$p - value = P(t_{250} < 15.81) \approx 1 > \alpha = 0.01.$$

d) Nel punto b) stiamo usando un test a due code, e quello che vogliamo testare è l'esistenza di una differenza, non importa in quale direzione. Nel punto c) stiamo usando un test a una coda, e concludiamo che la marca B non risulta superiore alla marca A; la differenza è nell'altra direzione.

Esercizio # 3

Si vuole valutare il tempo di clock dei microprocessori prodotti da due linee di produzione diverse. Vengono quindi scelti due campioni di ampiezza $n_X = 10$ e $n_Y = 12$ rispettivamente e ad ognuno di essi viene fatto eseguire uno stesso programma, misurando il tempo impiegato. Si ottengono i risultati seguenti per la media e la varianza campionaria dei due campioni

$$\overline{X} = 8.5, \quad S_X^2 = 3.6, \quad \overline{Y} = 5.2, \quad S_Y^2 = 1.1$$

Si puo' affermare che in media i due tempi di clock sono diversi?

Soluzione: Riassumiamo le informazioni fornite dall'esercizio:

$$\begin{array}{lll} \overline{X} = 8.5 & S_X^2 = 3.6 & n_X = 10 \\ \overline{Y} = 5.2 & S_Y^2 = 1.1 & n_Y = 12 \end{array}$$

Vogliamo testare le ipotesi: $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ vs $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$.
Costruiamo la statistica:

$$t_0 = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n_X} + \frac{S_Y^2}{n_Y}}} \overset{H_0}{\sim} t_\nu$$

e rifiutiamo H_0 se $|t_0| > t_{\nu,\alpha/2}$, dove i gradi di libertà ν sono calcolati utilizzando la formula a pag. 230 del libro.
Otteniamo:

$$t_0 = \frac{8.5 - 5.2}{\sqrt{\frac{3.6}{10} + \frac{1.1}{12}}} = 4.91$$

Ad ogni usuale livello di significatività si può respingere l'ipotesi che i microprocessori prodotti dalle due linee abbiano lo stesso tempo medio di clock, dato che $t_0 = 4.91 > t_{14,0.05} = 1.761$ e anche $t_0 = 4.91 > t_{14,0.001} = 3.787$.

Esercizio # 4

Vengono sottoposti a confronto i consumi delle autovetture Citroen Saxo 1.1 SPI e VW Polo 1.0 alla velocità costante di 120 Km/h. Si ritiene che i consumi dei due tipi di autovetture possa essere descritto da variabili aleatorie con distribuzione normale con la stessa varianza (cioé possiamo assumere $\sigma_C^2 = \sigma_P^2$). La Polo in 20 prove consuma mediamente 6.5 l/100Km, la Saxo in 22 prove consuma mediamente 6.6 l/100Km. Le relative varianze campionarie sono rispettivamente di 0.30 e 0.28.

a) Possiamo ritenere che le due autovetture abbiano lo stesso consumo medio al livello di significatività del 5%?

b) Si calcoli un intervallo di confidenza di livello 95% per la differenza dei consumi medi.

Soluzione: Riassumiamo le informazioni fornite dall'esercizio:

Citroen	$\overline{X}_c = 6.5$	$S_c^2 = 0.30$	$n_c = 20$
Polo	$\overline{X}_p = 6.6$	$S_p^2 = 0.28$	$n_p = 22$

a) Vogliamo testare le ipotesi: $H_0 : \mu_c = \mu_p$ vs $H_1 : \mu_c \neq \mu_p$.

Costruiamo la statistica:

$$t_0 = \frac{\overline{X}_c - \overline{X}_p}{S_P\sqrt{\frac{1}{n_c} + \frac{1}{n_p}}} \overset{H_0}{\sim} t_\nu$$

e rifiutiamo H_0 se $|t_0| > t_{\nu,\alpha/2}$, dove i gradi di libertà ν sono dati da $\nu = n_c+n_p-2 = 40$ e $S_P = \sqrt{\frac{(n_c-1)S_c^2+(n_p-1)S_p^2}{n_c+n_p-2}} = 0.5381$.

Otteniamo:

$$t_0 = \frac{6.5 - 6.6}{0.5381\sqrt{\frac{1}{20} + \frac{1}{22}}} = -0.612$$

Siccome $t_{\nu,\alpha/2} = t_{40,0.025} \approx 2.021 > |t_0| = 0.612$ possiamo concludere che i dati non ci forniscono evidenze sufficienti per rifiutare H_0.

b) L'intervallo di confidenza per $\mu_c - \mu_p$ a livello 95% è dato da:

$$\overline{X}_c - \overline{X}_p \pm t_{\nu,\alpha/2}S_P\sqrt{\frac{1}{n_c} + \frac{1}{n_p}}$$

dove $t_{40,0.025} = 2.021$

$$6.5 - 6.6 \pm 2.021(0.5381)\sqrt{\frac{1}{20} + \frac{1}{22}}$$

$$-0.1 \pm 0.33586$$

$$(-0.43596; 0.23596)$$

DATI ACCOPPIATI:

Esercizio # 5

La concentrazione di zinco nell'acqua potabile ne influenza il sapore e può anche risultare nociva. Viene condotta un'analisi in sei punti diversi di un fiume e in ciascun punto viene misurata la concentrazione di zinco in superficie e in profondità. I dati sono mostrati nella seguente tabella:

	Zona 1	**Zona 2**	**Zona 3**	**Zona 4**	**Zona 5**	**Zona 6**
Concentrazione in profondità	0.430	0.266	0.567	0.531	0.707	0.716
Concentrazione in superficie	0.415	0.238	0.390	0.410	0.605	0.609

I dati suggeriscono che la vera concentrazione media di zinco in profondità eccede quella in superficie?

Soluzione: In questo caso i due campioni non sono indipendenti per cui dobbiamo utilizzare un Paired test. La variabile di interesse risulta quindi essere la v.a. ottenuta come differenza fra la concentrazione in profondità e quella in superficie.

	Zona 1	Zona 2	Zona 3	Zona 4	Zona 5	Zona 6
Concentrazione in profondità	0.430	0.266	0.567	0.531	0.707	0.716
Concentrazione in superficie	0.415	0.238	0.390	0.410	0.605	0.609
Differenze d_i	0.015	0.028	0.186	0.121	0.102	0.107

Della v.a. $d = Differenze$ dobbiamo calcolare la media e la deviazione standard:

$$\overline{d} = \frac{\sum_i d_i}{6} = \frac{0.559}{6} = 0.093 \ \text{ e } \ s_d = 0.063.$$

Vogliamo condurre il seguente test:

$$H_0 : \mu_d = 0 \quad vs \quad H_1 : \mu_d > 0$$

Costruiamo il test sulla base della statistica:

$$t_0 = \frac{\overline{d}}{s_d/\sqrt{n}} \overset{H_0}{\sim} t_{n-1}$$

e rifiutiamo H_0 se $t_0 > t_{\alpha,n-1}$.
In questo caso otteniamo:

$$t_0 = \frac{0.093}{0.063/\sqrt{6}} = 3.61 \overset{H_0}{\sim} t_5$$

Notiamo che $t_{0.05,5} = 2.015$ e $t_{0.01,5} = 3.365$ per cui possiamo concludere che i dati forniscono sufficienti evidenze per rifiutare H_0.

Esercizio # 6

Per valutare l'efficacia di un nuovo componente elettronico che dovrebbe aumentare la produttività di particolari macchine stampatrici vengono scelte 12 macchine appartenenti a 12 diversi stabilimenti e misurato il numero di pezzi stampati in un'ora prima di installare il componente elettronico (X_i) e dopo averlo installato (Y_i). I valori rilevati sono riportati nella seguente tabella:

	St1	St2	St3	St4	St5	St6	St7	St8	St9	St10	St11	St12
Prima	162	175	180	118	181	242	206	203	227	139	137	132
Dopo	152	121	143	151	161	251	166	181	211	96	141	166

Si può dire che il nuovo componente elettronico è efficace?

Soluzione: In questo caso i due campioni non sono indipendenti per cui dobbiamo utilizzare un Paired test. La variabile di interesse risulta quindi essere la v.a. ottenuta come differenza fra il Prima e il Dopo.

	St1	St2	St3	St4	St5	St6	St7	St8	St9	St10	St11	St12
Prima	162	175	180	118	181	242	206	203	227	139	137	132
Dopo	152	121	143	151	161	251	166	181	211	96	141	166
Diff d_i	10	54	37	-33	20	-9	40	22	16	43	-4	-34

Della v.a. $d = Differenze$ dobbiamo calcolare la media e la deviazione standard:

$$\overline{d} = \frac{\sum_i d_i}{6} = \frac{162}{12} = 13.5 \;\; \text{e} \;\; s_d = 28.80814$$

Vogliamo condurre il seguente test:

$$H_0 : \mu_d = 0 \quad vs \quad H_1 : \mu_d > 0$$

Costruiamo il test sulla base della statistica:

$$t_0 = \frac{\overline{d}}{s_d/\sqrt{n}} \overset{H_0}{\sim} t_{n-1}$$

e rifiutiamo H_0 se $t_0 > t_{\alpha,n-1}$.
In questo caso otteniamo:

$$t_0 = \frac{13.5}{28.80814/\sqrt{12}} = 1.623339 \overset{H_0}{\sim} t_{11}$$

Notiamo che $t_{0.05,11} = 1.796$ e $t_{0.01,11} = 2.718$ per cui possiamo concludere che i dati non forniscono sufficienti evidenze per rifiutare H_0.

DUE PROPORZIONI:

Esercizio # 7

In un campione di 200 bulloni prodotti da una macchina, sono stati trovati 15 bulloni difettosi. Invece, in un campione di 100 bulloni prodotti da un'altra macchina, sono stati trovati 12 bulloni difettosi.

a) Si calcoli un intervallo di confidenza di livello 95% per la differenza tra le proporzioni di bulloni difettosi prodotti dalle due macchine.

b) Si verifichi l'ipotesi che la macchina A abbia un livello di precisione inferiore a quello della macchina B, ad un livello di significatività dello 0.05

Soluzione: Riassumiamo le informazioni fornite dall'esercizio:

Macchina A:	$\hat{p}_A = \frac{15}{200} = 0.075$	$n_A = 200$
Macchina B:	$\hat{p}_B = \frac{12}{100} = 0.12$	$n_B = 100$

a) L'intervallo di confidenza per $p_B - p_A$ di livello 95% è dato da:

$$\hat{p}_B - \hat{p}_A \pm z_0 \sqrt{\frac{\hat{p}_A(1-\hat{p}_A)}{n_A} + \frac{\hat{p}_B(1-\hat{p}_B)}{n_B}}$$

$$0.12 - 0.075 \pm 1.96 \sqrt{\frac{0.075(1-0.075)}{200} + \frac{0.12(1-0.12)}{100}}$$

$$0.045 \pm 0.073$$

$$(-0.028;\ 0.118)$$

b) Vogliamo testare le seguenti ipotesi:

$$H_0 : p_A = p_B \quad vs \quad H_1 : p_A > p_B$$

che equivalgono alle seguenti:

$$H_0 : p_A - p_B = 0 \quad vs \quad H_1 : p_A - p_B > 0$$

Costruiamo il test sulla base della statistica:

$$z_0 = \frac{\hat{p}_A - \hat{p}_B}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right)}} \overset{H_0}{\sim} N(0,1)$$

e rifiutiamo H_0 se $z_0 > z_\alpha$.

Nel nostro caso abbiamo $\hat{p} = \frac{X_A + X_B}{n_A + n_B} = \frac{15+12}{100+200} = 0.09$, e quindi

$$z_0 = \frac{0.075 - 0.12}{\sqrt{0.09(1-0.09)\left(\frac{1}{200} + \frac{1}{100}\right)}} = -1.2838$$

dato che $z_\alpha = 1.64 > z_0 = -1.2838$ concludiamo che nei dati non ci sono evidenze sufficienti per rifiutare H_0.

Calcoliamo anche il p-value:

$$p - value = P(Z > -1.2838) = 1 - \Phi(-1.2838) = 0.90 > \alpha = 0.05.$$

Esercizio # 8

Un ufficio studi di una certa assicurazione ha constatato che nella località A, dove conta 25 automobili assicurate, vi sono stati 5 furti d'auto; nella località B, a fronte di 45 auto assicurate, vi sono stati 8 furti d'auto. L'ufficio studi può concludere che le due località siano ugualmente pericolose? In caso contrario, qual'è la più pericolosa?

Soluzione: Riassumiamo le informazioni fornite dall'esercizio:

Località A	$n_A = 25$	$\hat{p}_A = \frac{5}{25} = 0.2$
Località B	$n_B = 45$	$\hat{p}_B = \frac{8}{45} = 0.1178$

Vogliamo testare le ipotesi: $H_0 : p_A = p_B$ vs $H_1 : p_A \neq p_B$.

Utilizziamo la seguente statistica:

$$z_0 = \frac{\hat{p}_A - \hat{p}_B}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}\right)}} \overset{H_0}{\sim} N(0,1)$$

e rifiutiamo H_0 se $|z_0| > z_{\alpha/2}$.
Ci serve calcolare il valore di $\hat{p} = \frac{5+8}{25+45} = 0.1857$ e quindi abbiamo

$$z_0 = \frac{0.2 - 0.1778}{\sqrt{0.1857(1-0.1857)\left(\frac{1}{25}+\frac{1}{45}\right)}} = 0.22887 < z_{0.005} = 2.56$$

Possiamo concludere che i dati non ci forniscono evidenze per rifiutare H_0.

Esercizio # 9

Un campione di 300 dei votanti della regione A e di 200 della regione B, ha mostrato che rispettivamente il 56% e il 48% è favorevole ad un certo candidato. Ad un livello di significatività dello 0.05, provate che l'ipotesi che

a) non c'è differenza tra le due regioni;

b) il candidato è preferito nella regione A.

Soluzione: Riassumiamo le informazioni fornite dall'esercizio:

Regione A	$n_A = 300$	$\hat{p}_A = 0.56$
Regione B	$n_B = 200$	$\hat{p}_B = 0.48$

a) Vogliamo testare le ipotesi: $H_0 : p_A = p_B$ vs $H_1 : p_A \neq p_B$. Utilizziamo la seguente statistica:

$$z_0 = \frac{\hat{p}_A - \hat{p}_B}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}\right)}} \overset{H_0}{\sim} N(0,1)$$

e rifiutiamo H_0 se $|z_0| > z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$.

Ci serve calcolare il valore di $\hat{p} = \frac{0.56(300)+0.48(200)}{300+200} = 0.528$ e quindi abbiamo

$$z_0 = \frac{0.56 - 0.48}{\sqrt{0.528(1-0.528)\left(\frac{1}{300}+\frac{1}{200}\right)}} = 1.75546 < z_{0.025} = 1.96$$

Possiamo concludere che i dati non ci forniscono evidenze per rifiutare H_0.

b) Vogliamo testare le ipotesi: $H_0 : p_A = p_B$ vs $H_1 : p_A > p_B$ e rifiutiamo H_0 se $z_0 > z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$. Dato che $z_0 = 1.75546 > z_{0.05} = 1.645$ possiamo rifiutare H_0.

DUE VARIANZE:

Esercizio # 10

Un costruttore stà considerando l'acquisto di speciali barre metalliche da due diversi fornitori. Un campione di 12 barre di lunghezza dichiarata pari a 127 mm viene acquistato da ciascuno dei due fornitori e poi misurato. La deviazione standard della lunghezza delle barre del primo fornitore risulta essere $s_1 = 0.13$ mm, mentre quella delle barre del secondo fornitore è di $s_2 = 0.17$ mm.

a) Questi dati indicano che la lunghezza di una barra del primo fornitore è soggetta a maggior variabilità rispetto a quella del secondo fornitore? (Assumiamo normalità e consideriamo un livello di significatività $\alpha = 0.02$).

b) Costruite un intervallo di confidenza di livello 95% per il rapporto fra le varianze.

Soluzione: Riassumiamo le informazioni fornite dall'esercizio: $\mu = 127$

Fornitore 1:	$s_1 = 0.13$	$n_1 = 12$
Fornitore 2:	$s_2 = 0.17$	$n_2 = 12$

a) Vogliamo condurre il seguente test:

$$H_0 : \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 1 \quad vs \quad H_1 : \frac{\sigma_1}{\sigma_2} > 1$$

Costruiamo il test sulla base della statistica:

$$F_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} \overset{H_0}{\sim} F_{n_1-1,n_2-1}$$

e rifiutiamo H_0 se $F_0 > F_{\alpha,n_1-1,n_2-1}$ Nel nostro caso otteniamo:

$$F_0 = \frac{0.13^2}{0.17^2} = 0.585$$

Dato che $F_{0.025,11,11} \approx 3.53 > F_0 = 0.585$ possiamo concludere che nei dati non ci sono evidenze sufficienti per rifiutare H_0.

b) L'intervallo di confidenza di livello 95% del rapporto fra le varianze è dato da:

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} F_{1-\alpha/2,n_1-1,n_2-1} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{s_1^2}{s_2^2} F_{\alpha/2,n_1-1,n_2-1}$$

dove $F_{1-\alpha/2,n_1-1,n_2-1} = \frac{1}{F_{\alpha/2,n_1-1,n_2-1}}$, quindi

$$\frac{0.13^2}{0.17^2} \frac{1}{3.53} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{0.13^2}{0.17^2} 3.53$$

$$0.16565 \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le 2.0642$$