Statistica Matematica A

Esercitazione # 3

Binomiale:

Esercizio # 1

Trovate la probabilita' che in 5 lanci di un dado non truccato il 3 si presenti

1. mai
2. almeno una volta
3. quattro volte

Esercizio # 2

Assumendo che la probabilita' che nasca un maschio sia 1/2, trovate la probabilita' che in una famiglia con 4 figli ci sia

1. almeno un maschio;
2. almeno un maschio e una femmina.
3. Consideriamo ora 4000 famiglie con 4 figli. Quante ci si aspetterebbe che abbiano almeno un maschio e una femmina?

Esercizio # 3

Se il 20% dei bulloni prodotti da una certa macchina e' difettoso, determinate la probabilita' che, su 4 bulloni scelti a caso

1. uno sia difettoso;
2. zero siano difettosi;
3. al massimo 2 siano difettosi.
4. Trovare la media e lo scarto quadratico medio della distribuzione dei bulloni difettosi su un totale di 400 bulloni.

Esercizio # 4

Durante un esame a risposta multipla con 5 domande e 3 possibili risposte per ogni domanda.

1. Quale e' la probabilita' che uno studente azzecchi almeno 4 risposte semplicemente rispondendo a caso?

2. Quale e' il numero medio di risposte azzeccate?

Esercizio # 5

La probabilita' di laurearsi di uno studente che entra nell'Universita' e' 0.4. Determinate la probabilita' che, su 5 studenti

1. nessuno
2. uno
3. almeno uno riesca a laurearsi

Poisson:

Esercizio # 6

Tra le 2 e le 4 del pomeriggio, in media, al minuto, il numero di chiamate telefoniche che arrivano ad un certo centralino e' 2.5. Trovate la probabilita' che, in un minuto, ci siano

1. zero
2. due
3. quattro o meno
4. piu' di sei chiamate telefoniche

Esercizio # 7

Un certo tipo di foglio metallico, in media, ha 5 difetti per 10 mq. Se assumiamo una distribuzione di Poisson, qual'e' la probabilita' che un foglio di 15 mq avra' almeno 3 difetti?

Esercizio # 8

In un lungo manoscritto, si e' scoperto che solo il 13.5% delle pagine contengono errori tipografici. Se assumiamo che il numero di errori per pagina e' una variabile aleatoria con una distribuzione di Poisson, trovate la % di pagine che hanno esattamente 1 errore.

Esercizio # 9

Secondo certe statistiche sugli USA, il numero medio annuo di annegamenti accidentali e' di 3 su 100000 abitanti. Trovate la probabilita' che, in una citta' con popolazione pari a 200000 abitanti, si siano

1. due annegamenti accidentali all'anno
2. meno di tre annegamenti accidentali all'anno

Esercizio # 10

Una sostanza radioattiva emette particelle secondo un processo di Poisson. Se la probabilita' di non emissione in un intervallo di 1 secondo e' pari a 0.165, trovate

1. il numero atteso di emissioni per secondo
2. la probabilita' di non emissione in un intervallo di 2 secondi
3. la probabilita' di non piu' di 2 emissioni in un intervallo di 4 secondi

Geometrica

Esercizio # 11

La probabilita' che un iscritto passi il test pratico per la patente e' ad ogni tentativo pari a 0.75. Qual'e' la probabilita' che un iscritto passera' finalmente il test pratico al quarto tentativo?

Svolgimenti:

Esercizio # 1

Sia X la variabile aleatoria che indica il numero di volte che si presenta 3. La probabilita' di successo in questo esperimento binomiale (cioe' la probabilita' che si presenti 3) e' pari a 1/6 e consideriamo 5 ripetizioni dell'esperimento (cioe' il dado viene lanciato 5 volte). Quindi X ha una distribuzione binomiale con parametri n = 5 e p = 1/6.

1. $P(X = 0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} (1/6)^0(1 - 1/6)^5 = (5/6)^5 = 0.4019;$
2. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.4019 = 0.5981;$
3. $P(X = 4) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} (1/6)^4(1 - 1/6)^1 = \frac{25}{6}(1/6)^4 = 0.0032.$

Esercizio # 2

Sia X la variabile aleatoria che indica il numero di figli maschi nella famiglia con 4 figli. La v.a. X ha una distribuzione binomiale con parametri n = 4 e p = 1/2.

1. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} (1/2)^0(1 - 1/2)^4 = 15/16 = 0.9375$
2. P(almeno un maschio e una femmina)=1 - P(nessun maschio) - P(nessuna femmina)=$1-(1/2)^4 - (1/2)^4 = 7/8$

3. Sia Z la variabile aleatoria che indica il numero di famiglie con almeno un maschio e una femmina fra le 4000 considerate. La probabilita' di successo p, come ottenuto nel punto precedente e' pari a 7/8. La v.a. Z ha una distribuzione binomiale con parametri n = 4000 e p = 7/8. Percio' il numero atteso di famiglie con almeno 1 maschio e una femmina e' data da:

$$E(Z) = np = 4000(7/8) = 3500$$

Esercizio # 3

Sia X la v.a. che indica il numero di bulloni difettosi fra i 4 considerati ed ha una distribuzione binomiale con parametri n = 4 e p = 0.2.

1. $P(X = 1) = \left(\begin{array}{c} 4 \\ 1 \end{array} \right) (0.2)^1(1 - 0.2)^3 = 0.4096;$

2. $P(X = 0) = \left(\begin{array}{c} 4 \\ 0 \end{array} \right) (0.2)^0(1 - 0.2)^4 = 0.4096;$

3. $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0.4096 + 0.4096 + \left(\begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} \right) (0.2)^2(1 - 0.2)^2 = 0.4096 + 0.4096 + 0.1536 = 0.9728;$

4. Sia Z la v.a. che indica il numero di bulloni difettosi su un totale di 400, e quindi Z ha una distribuzione binomiale di parametri n = 400 e p = 0.2. Percio' abbiamo che la media e' pari a $E(Z) = np = 400(0.2) = 80$ e lo scarto quadratico medio e' dato da $\sigma(Z) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{400(0.2)(0.8)} = 8$.

Esercizio # 4

Sia X la v.a. che indica il numero di risposte azzeccate fra le 5 domande dell'esame, e quindi X ha una distribuzione binomiale di parametri n = 5 e p = 1/3.

1. $P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) = 0.04527$

2. Il numero medio di risposte azzeccate e' dato da $E(X) = np = 5(1/3) = 5/3$.

Esercizio # 5

Sia X la v.a. che indica il numero di studenti che riescono a laurearsi su 5 studenti. La v.a. X ha una distribuzione binomiale con parametri n = 5 e p = 0.4.

1. $P(X = 0) = (0.6)^5 = 0.07776$

2. $P(X = 1) = 5(0.4)(0.6)^4 = 0.2592$

3. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 0.92224$

Esercizio # 6

Sia X la v.a. che indica il numero di chiamate telefoniche che arrivano al centralino al minuto. La v.a. X ha una distribuzione di Poisson con parametro $\lambda = 2.5$.

1. $P(X = 0) = \frac{e^{-2.5}2.5^0}{0!} = e^{-2.5} = 0.08208$;
2. $P(X = 2) = \frac{e^{-2.5}2.5^2}{2!} = 0.2565$;
3. $P(X \leq 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0.08208 + 0.2565 + \frac{e^{-2.5}2.5^3}{3!} + \frac{e^{-2.5}2.5^4}{4!} = 0.8911$;
4. $P(X > 6) = 1 - P(X \leq 6) = 1 - P(X \leq 4) - P(X = 5) - P(X = 6) = 1 - 0.8911 - \frac{e^{-2.5}2.5^5}{5!} - \frac{e^{-2.5}2.5^6}{6!} = 0.0142$.

Esercizio # 7

Sia X la v.a. che indica il numero di difetti in un foglio di 10 mq di metallo. La v.a. X ha una distribuzione di Poisson con parametro $\lambda = 5$. L'unita' di area per la variabile X e' 10 mq, ma vogliamo individuare il numero di errori in un'area di 15 mq. Sia Y la v.a. che indica il numero di difetti in un foglio di 15 mq di metallo, la quale ha una distribuzione di Poisson con parametro $\alpha = 5(1.5) = 7.5$. Percio' abbiamo

$$P(Y \geq 3) = 1 - P(Y < 3) = 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) - P(Y = 2) = .9797.$$

Esercizio # 8

Sia X la v.a. che indica il numero di errori per pagina. La v.a. X ha una distribuzione di Poisson, con parametro che possiamo calcolare usando il fatto che $P(X = 0) = 1 - 0.135 = 0.865 = e^{-\lambda}$, percio' $\lambda = 0.145$.

$$P(X = 1) = \frac{e^{-0.145}0.145^1}{1!} = 0.125.$$

Esercizio # 9

Sia X la v.a. che indica il numero di annegamenti accidentali negli USA su 100000 abitanti. La v.a. X ha una distribuzione di Poisson con parametro $\lambda = 3$. Siccome vogliamo calcolare delle probabilita' riguardanti citta' con 200000 abitanti, definiamo Y come la v.a. che indica il numero di annegamenti accidentali negli USA su 200000 abitanti, la quale ha una distribuzione di Poisson con parametro $\alpha = 3 \times 2 = 6$.

1. $P(Y = 2) = \frac{e^{-6}6^2}{2!} = 0.04462$;
2. $P(Y < 3) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) = e^{-6} + e^{-6}6 + 0.04462 = 0.06197$

Esercizio # 10

Sia X la v.a. che indica il numero di particelle emesse in 1 secondo. La v.a. X ha una distribuzione di Poisson con parametro che possiamo calcolare usando il fatto che $P(X = 0) = 0.165 = e^{-\lambda}$, percio' $\lambda = 1.8018$.

1. Il numero atteso e' dato dal valore del parametro percio' e' 1.8018;
2. Siccome vogliamo considera un intervallo di 2 secondi, definiamo Y come la v.a. che indica il numero di particelle emesse in 2 secondi, la quale ha una distribuzione di Poisson con parametro $\alpha = 1.8018 \times 2 = 3.6036$, quindi $P(Y = 0) = e^{-3.6036} = 0.0273$;
3. Consideriamo un intervallo di 4 secondi percio' definiamo Y come la v.a. che indica il numero di particelle emesse in 4 secondi, la quale ha una distribuzione di Poisson con parametro $\alpha = 1.8018 \times 4 = 7.2072$, quindi

$$\begin{aligned} P(Y \leq 2) &= P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) \\ &= e^{-7.2072} + 7.2072e^{-7.2072} + \frac{e^{-7.2072}7.2072^2}{2} \\ &= 0.0253 \end{aligned}$$

Esercizio # 11

Sia X=4 e $\theta = 0.75$, abbiamo una distribuzione geometrica percio'

$$P(\text{passa al quarto tentativo}) = 0.75(1 - 0.75)^3 = 0.0117.$$