Esercitazione # 1

November 8, 2002

1 Esercizi preliminari

Esercizio 1

(es. 3.11 in Montgomery)

Per misurare accuratamente dei pesi viene usata una scala digitale. Sia X la variabile aleatoria che indica la misurazione fatta usando questa scala e si considerino i seguenti intervalli di valori di misurazione:

A : peso supera i 20 grammi
B : peso è inferiore o uguale a 15 grammi
C : peso è compreso tra 15 e 24 grammi (estremi esclusi).

Si conoscono le seguenti probabilità:

$P(X \in A) = 0.5$
$P(X \in B) = 0.3$
$P(X \in C) = 0.6$

a) A e B sono mutuamente disgiunti? B e C? A e C?

b) Descrivere A^c e determinarne la probabilità.

c) Descrivere C^c e determinarne la probabilità.

d) Determinare $P(15 < X \leq 20)$.

Esercizio 2

(es. 3.10 in Montgomery)

Siano A, B e C insiemi a due a due disgiunti con

$P(X \in A) = 0.2$
$P(X \in B) = 0.3$
$P(X \in C) = 0.5$

Determinare:

a) $P(X \in A^c)$

b) $P(X \in B^c)$

c) $P(X \in C^c)$

d) $P(X \in A \cup B)$

e) $P(X \in A \cup C)$

Esercizio 3

(es. 3.15 e 3.16 in Montgomery)

Sia X la durata (in ore) di un laser semiconduttore con le seguenti probabilità:
$P(X \leq 5000) = 0.05$
$P(5000 < X \leq 7000) = 0.5$
$P(X > 7000) = 0.45$

a) Determinare $P(X \leq 7000)$

b) Determinare $P(X > 5000)$

c) Supponiamo ora che ci siano tre laser indipendenti tutti soddisfacenti le ipotesi precedenti. Calcolare:

   1) la probabilità che tutti e tre i laser funzionino per più di 7000 ore;

   2) la probabilità che tutti e tre i laser funzionino per più di 5000 ore;

   3) nessuno dei tre laser funzioni per più di 7000 ore.

2 Variabili continue

Esercizio 4

(Eserciziario Baldi, Ladelli, ...)

Sia X una variabile aleatoria con funzione di ripartizione:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & se\ x < 0 \\ \frac{1}{50}x^2, & se\ 0 \leq x < 5 \\ -\frac{1}{50}x^2 + \frac{2}{5}x - 1, & se\ 5 \leq x < 10 \\ 1, & se\ x \geq 10 \end{cases}$$

a) Disegnare F. Quali valori può assumere la variabile aleatoria (continua) X?

b) Mostrare che X ha densità e calcolarla.

c) Calcolare il valore atteso di X.

Esercizio 5

(eserciziario Baldi, Ladelli, ...)

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^2}, & se\ x > 1 \\ 0, & se\ x \leq 1 \end{cases}$$

a) Determinare $c \in \mathbb{R}$ tale che f sia una funzione di densità.

b) Esistono il valore atteso e la varianza di X? Se sì, calcolarli.

Esercizio 6

(es. 3.23 in Montgomery)

La funzione di densità del tempo (in ore) di rottura di una componente elettronica sia data da

$$f(x) = \frac{1}{1000} e^{-\frac{x}{1000}}, \text{ per } x > 0.$$

a) Determinare la probabilità che tale componente duri più di 3000 ore prima di rompersi.

b) Determinare la probabilità che tale componente si rompa nell'intervallo di tempo tra 1000 e 2000 ore.

c) Determinare la probabilità che tale componente si rompa prima di 1000 ore.

d) Determinare il numero di ore in cui il 10% delle componenti si è rotta.

Esercizio 7

(es. 3.22 in Montgomery)

Sia

$$f(x) = \frac{3}{2} x^2, \text{ per } -1 < x < 1.$$

Determinare:

1. $P(X > 0)$
2. $P\left(X > \frac{1}{2}\right)$
3. $P\left(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}\right)$
4. $P(X < -2)$
5. $P\left(X < 0 \text{ oppure } X > -\frac{1}{2}\right)$

6. il valore $y \in \mathbb{R}$ tale che $P(X > y) = 0.05$

Esercizio 8

(es. 3.133 in Montgomery)

Determinare la costante $k \in \mathbb{R}$ tale per cui le seguenti funzioni siano funzioni di densità. Determinare poi la media e la varianza di X.

1. $f(x) = kx^2$, per $0 < x < 4$
2. $f(x) = k(1 + 2x)$, per $0 < x < 2$
3. $f(x) = ke^{-x}$, per $x > 0$.

3 Variabili discrete

Esercizio 9

(es. 3.59 in Montgomery)

Un'automobile può essere venduta con una serie di optionals.
La funzione di massa f del numero di optionals scelti dal cliente è data da:

x	7	8	9	10	11	12	13
$f(x)$	0.040	0.130	0.190	0.300	0.240	0.050	0.050

1. Determinare la probabilità che un cliente scelga meno di 9 optionals.
2. Determinare la probabilità che un cliente scelga più di 11 optionals.
3. Determinare la probabilità che un cliente scelga un numero di optionals compreso tra 8 e 12 (estremi inclusi).
4. Determinare la funzione di ripartizione di X.
5. Calcolare il valore atteso degli optionals scelti.

Esercizio 10

Consideriamo le seguenti funzioni F e G:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4}, & 1 \leq x < 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{3}{4}, & 1 < x < 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases}$$

1. Quale delle due è una funzione di ripartizione?
2. Risalire a X.
3. Calcolare il valore atteso di X.

Esercizio 11

(es. 3.135 in Montgomery)

Determinare la costante $c \in \mathbb{R}$ tale per cui la seguente funzione è una funzione di massa:

$$f(x) = cx, \text{ per } x = 1, 2, 3, 4.$$

4 Svolgimenti

Esercizio 1

a) $A \cap B = \emptyset$ allora disgiunti

$B \cap C = \emptyset$ allora disgiunti
$A \cap C \neq \emptyset$ allora NON mutuamente disgiunti

b) A^c : peso è inferiore o uguale a 20 grammi
$P(X \in A^c) = 1 - P(X \in A) = 0.5$

c) C^c : peso è ≤ 15 grammi o ≥ 24 grammi
$P(X \in C^c) = 1 - 0.6 = 0.4$

d) $P(15 < X \leq 20) = P(X \leq 20) - P(X \leq 15) = P(X \in A^c) - P(X \in B) = 0.2$

Esercizio 2

a) $P(X \in A^c) = 1 - P(X \in A) = 0.8$

b) $P(X \in B^c) = 1 - P(X \in B) = 0.7$

c) $P(X \in C^c) = 1 - P(X \in C) = 0.5$

d) $P(X \in A \cup B) = P(X \in A) + P(X \in B) = 0.5$, siccome A e B sono disgiunti

e) $P(X \in A \cup C) = P(X \in A) + P(X \in C) = 0.7$, siccome A e C sono disgiunti

Esercizio 3

a) $P(X \leq 7000) = 1 - P(X > 7000) = 0.55$

b) $P(X > 5000) = 1 - P(X \leq 5000) = 0.95$

c)
   1) $P(X_1 > 7000; X_2 > 7000; X_3 > 7000) = (0.45)^3$, siccome i tre laser sono indipendenti
   2) $P(X_1 > 5000; X_2 > 5000; X_3 > 5000) = (0.95)^3$, siccome i tre laser sono indipendenti
   3) $P(X_1 \leq 7000; X_2 \leq 7000; X_3 \leq 7000) = (0.55)^3$, siccome i tre laser sono indipendenti

Esercizio 4

a) I valori assunti (con probabilità positiva) dalla v.a. X sono compresi nell'intervallo $[0, 10]$.

b) F è derivabile con continuità e la funzione di densità $f = F'$ di X risulta essere:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{25}x, & 0 < x < 5 \\ -\frac{1}{25}x + \frac{2}{5}, & 5 \leq x < 10 \\ 0, & \textit{altrove} \end{cases}$$

c) $E[X] = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\, dx = \int_0^5 \frac{1}{25}x^2 dx + \int_5^{10} \left(-\frac{1}{25}x^2 + \frac{2}{5}x\right) dx = 5$

Esercizio 5

a) $f \geq 0$ e $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{c}{x^2} dx = \left(-\frac{c}{x}\right)\Big|_1^{+\infty} = c$. Di conseguenza, è necessario e sufficiente che $c = 1$.

b) Il valore atteso non è finito.

Esercizio 6

a) $P(X > 3000) = \int_{3000}^{+\infty} \frac{1}{1000} e^{-\frac{x}{1000}} dx = \left(-e^{-\frac{x}{1000}}\right)\Big|_{3000}^{+\infty} = e^{-3}$

b) $P(1000 < X < 2000) = \int_{1000}^{2000} \frac{1}{1000} e^{-\frac{x}{1000}} dx = -e^{-2} + e^{-1}$

c) $P(X < 1000) = ... = 1 - \frac{1}{e}$

d) $P(X \le y) = \int_0^y \frac{1}{1000} e^{-\frac{x}{1000}} dx = -e^{-y/1000} + 1 = 0.1$ allora $y = -1000 \ln(0.9)$.

Esercizio 7

a) $P(X > 0) = \int_0^1 f(x)\, dx = \left(\frac{x^3}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$

b) $P\left(X > \frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\, dx = \left(\frac{x^3}{2}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{7}{16}$

c) $P\left(-\frac{1}{2} \le X \le \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$

d) $P(X < -2) = 0$

e) $P\left(X < 0 \text{ oppure } X > -\frac{1}{2}\right) = P(X < 0) + P\left(X > -\frac{1}{2}\right) - P\left(-\frac{1}{2} < X < 0\right) =$
$= \frac{1}{2} + \frac{9}{16} - \frac{1}{16} = 1$

f) y deve risolvere: $1 - \frac{y^3}{2} = 0.1$. Si ottiene $y = 0.965$

Esercizio 8

1. $\int_0^4 kx^2 dx = k\frac{64}{3}$ allora $k = \frac{3}{64}$
   $E[X] = \int_0^4 kx^3 dx = 3$
2. $k\int_0^2 (1 + 2x)\, dx = 6k$ allora $k = \frac{1}{6}$
   $E[X] = ... = \frac{11}{9}$
3. $\int_0^{+\infty} ke^{-x} dx = k$ allora $k = 1$
   $E[X] = ... = 1$

Esercizio 9

1. $P(X < 9) = 0.040 + 0.0130 = 0.170$
2. $P(X > 11) = 0.050 + 0.050 = 0.1$
3. $P(8 \le X \le 12) = 0.130 + 0.190 + 0.300 + 0.240 + 0.050 + = 0.910$

4.
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 7 \\ 0.040, & 7 \leq x < 8 \\ 0.170, & 8 \leq x < 9 \\ 0.360, & 9 \leq x < 10 \\ 0.660, & 10 \leq x < 11 \\ 0.900, & 11 \leq x < 12 \\ 0.950, & 12 \leq x < 13 \\ 1 & x \geq 13 \end{cases}$$

5. $E[X] = ... = 9.92$

Esercizio 10

1. F è una funzione di ripartizione, mentre G no in quanto non è continua da destra in $x = 1$
2. X assume (con probabilità positiva) i valori 0,1,4
3. $E[X] = \frac{5}{4}$

Esercizio 11

c deve esser positiva, inoltre deve soddisfare $1 = c + 2c + 3c + 4c$, quindi per $c = \frac{1}{10}$ la funzione f è di massa.