Esercitazione n.4

1 Applicazioni del TCL

1.1

Una ditta di trasporti internazionali possiede 100 tir dello stesso tipo. Ogni tir percorre una media di 600 km al giorno con una deviazione standard di 50 km.

1. Supponendo che i giorni lavorativi in un anno siano 340, quanti chilometri percorre mediamente un tir in un anno?

2. Una merce deve essere trasportata da un tir ad una distanza di 7000 km.. Viene chiesto al titolare dopo quanti giorni dalla partenza avverrà la consegna. Che risposta deve dare il titolare affinchè con probabilità almeno pari a 0.9 la merce arrivi a destinazione entro il tempo dichiarato?

Soluzione

1. Sia X_i la v.a. che descrive lo spazio percorso nel giorno i. Sappiamo che $E(X_i) = 600$ km. e $Var(X_i) = 50^2\text{k}m^2$. Allora lo spazio percorso in 340 giorni è rappresentato dalla v.a. $S = \sum_{i=1}^{340} X_i$.
La media di questa variabile è $E(S) = \sum_{i=1}^{340} E(X_i) = 340 * 600 =$ 204.000 km.

2. Bisogna calcolare quanto deve valere n affinchè risulti

$$P(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq 7000) \geq 0.9.$$

Dal TCL sappiamo che $\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$, dunque $P(\sum_{i=1}^n X_i \geq 7000) = P(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma * \sqrt{n}} \geq \frac{7000-n*600}{50*\sqrt{n}}) = P(Z \geq \frac{7000-n*600}{50*\sqrt{n}}) = 1 - \phi(\frac{7000-n*600}{50*\sqrt{n}}) \geq 0.9$ da cui deve essere $\phi(\frac{7000-n*600}{50*\sqrt{n}}) \leq 1 - 0.9 = 0.1$ e quindi $\frac{7000-n*600}{50*\sqrt{n}} \leq z_{0.1} = -1.28$. Si ottiene così la disequazione $64\sqrt{n} - n600 + 7000 \leq 0$. Ponendo $x = \sqrt{n}$ si ottiene una disequazione di II grado le cui soluzioni sono 3.47 e −3.36. Poichè siamo interessati solo alla radice positiva, otteniamo $x \geq 3.47$ ossia $n \geq 12.04$. Dunque il titolare deve dichiarare 13 giorni di attesa ▮

1.2

Il tempo di lavorazione di un pezzo meccanico è una variabile aleatoria di media $\mu = 2$ minuti e deviazione standard $\sigma = 0,3$ minuti.

1. In approssimazione normale, calcolare la probabilità di effettuare la lavorazione di 150 pezzi in un tempo minore di 5 ore e 10 minuti.

2. In approssimazione normale, calcolare la probabilità che la media campionaria dei tempi di lavorazione relativa a 100 pezzi sia compresa tra 1 minuto e 55 secondi e 2 minuti e 10 secondi.

3. Quanti pezzi dobbiamo misurare per essere certi al 95% che la media campionaria dei loro tempi di lavorazione non differisca da 2 minuti per più di 4 secondi?

Soluzione Sia T_i la v.a. che misura il tempo di lavorazione dell'i-esimo pezzo. Per ipotesi le T_i sono i.i.d., con $\mathrm{E}[T_i] = 2'$, e $\mathrm{Var}[T_i] = (0,3')^2$.

1. Si ha:

$$P\left[T_1 + \cdots + T_{150} < 310'\right] = P\left[\frac{T_1 + \cdots + T_{150} - 300'}{0,3'\sqrt{150}} < \frac{10'}{0,3'\sqrt{150}}\right] \simeq$$

$$\Phi(2,722) \simeq 0,99676.$$

2. Ricordando che $1'55'' = 115''$, $2'10'' = 130''$ e $0,3' = 18''$ si ha:

$$P(115'' < \overline{T}_{100} < 130'') = P(\frac{(115'' - 120'') \times 10}{18''} < Z < \frac{(130'' - 120'') \times 10}{18''}) \simeq$$

$$\simeq \Phi(5,556) - \Phi(-2,777) \simeq 1 - (1 - \Phi(2,777)) \simeq 0,99726.$$

3. Si deve imporre

$$0,95 \le P(|\overline{T}_n - 120''| \le 4'') = P(\frac{|\overline{T}_n - 120''|\sqrt{n}}{18''} \le \frac{4''\sqrt{n}}{18''}) = 2\Phi(\frac{2}{9}\sqrt{n}) - 1$$

da cui si deduce

$$\frac{2}{9}\sqrt{n} \ge z_{0,975} = 1,96 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{n} \ge 8,82 \quad \Rightarrow \quad n \ge 78.$$

∎

1.3

Un ingegnere civile costruisce un ponte che può sopportare un peso massimo di 200 tonnellate. Si supponga che il peso (espresso in tonn.) di un'automobile sia una v.a. di media 1 e dev.st. 0.1.
Quante auto devono transitare contemporaneamente sul ponte affinchè con probabilità superiore a 0.1 venga superato il peso massimo sopportato dal ponte?
SOLUZIONE Fissato un campione di n auto, indicato con X_i la v.a. che descrive il peso della i-sima auto ($i = 1, ..., n$) dal testo si sa che $E(X_i) = 1$ e $Var(X_i) = (0.1)^2 = 0.01$.
Supponiamo che le X_i siano v.a. indipendenti e identicamente distribuite.
Il peso totale delle auto che transitano sul ponte è descritto dalla v.a. $S_n = X_1 + ... + X_n$, quindi si tratta di determinare il valore di n per cui risulta $P(S_n > 200) > 0.1$. Per il TCL si ha che $S_n \sim N(1 * n, 0.01 * n)$, quindi

$$P(S_n > 200) = P(\frac{S_n - n}{0.1\sqrt{n}} > \frac{200 - n}{0.1\sqrt{n}}) =$$

$$= P(Z > \frac{200 - n}{0.1\sqrt{n}}) > 0.1$$

con $Z \sim N(0,1)$. Dunque deve essere $1 - \Phi(\frac{200-n}{0.1\sqrt{n}}) > 0.1$, cioè $\Phi(\frac{200-n}{0.1\sqrt{n}}) < 0.9$, da cui si deduce che $\frac{200-n}{0.1\sqrt{n}} < z_{0.9}$ dove $z_{0.9}$ denota il quantile di ordine 0.9 della Normale standard.
Consultando le tavole della Normale si trova $z_{0.9} = 1.28$ e sostituendo si ottiene quindi la disequazione $\frac{200-n}{0.1\sqrt{n}} < 1.28$. Risolvendo la disequazione si trova il valore minimo di n, ossia $n > 199$. ∎

1.4

La distanza d di una stella è calcolata come la media di una serie di misurazioni indipendenti e identicamente distribuite con media d e varianza 4. Quante osservazioni sono necessarie per essere sicuri al 95% che la media delle osservazioni approssimi d entro 0.5?

Soluzione Sia X_i la i-sima misurazione della distanza. Dal testo è noto che le var. X_i sono iid con media d e $Var = 4$. La distanza della stella è misurata effettuando n osservazioni X_i e calcolando poi la media campionaria $\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$.

Il problema consiste dunque nel determinare n in modo tale che $P(|\bar{X}_n - d| < 0.5) = 0.95$. Dal TCL si sa che $\frac{\sum_{i=1}^n X_i - nd}{\sigma\sqrt{n}} \sim N(0,1)$, quindi si può scrivere:

$$P(|\bar{X}_n - d| < 0.5) = P(|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - d| < 0.5) = P(|\frac{\sum_{i=1}^n X_i - nd}{n}| < 0.5) =$$

$$= P(|\frac{\sum_{i=1}^n X_i - nd}{n}| * \frac{\sqrt{n}}{\sigma} < \frac{\sqrt{n}}{2 * \sigma}) =$$

$$= P(|\frac{\sum_{i=1}^n X_i - nd}{\sqrt{n} * \sigma}| < \frac{\sqrt{n}}{2 * \sigma}) =$$

$$P(|Z| < \frac{\sqrt{n}}{2 * 2}) = 0.95$$

con $Z \sim N(0,1)$. Ma

$$P(|Z| < \frac{\sqrt{n}}{2 * 2}) = \Phi(\frac{\sqrt{n}}{4}) - \Phi(-\frac{\sqrt{n}}{4}) =$$

$$= \Phi(\frac{\sqrt{n}}{4}) - (1 - \Phi(-\frac{\sqrt{n}}{4})) = 2\Phi(\frac{\sqrt{n}}{4}) - 1 = 0.95$$

da cui segue

$$\Phi(\frac{\sqrt{n}}{4}) = 0.975 \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{4} = 1.96 \Rightarrow n = 62 \blacksquare$$

2 Approssimazione normale della distribuzione Binomiale

2.1

La percentuale di realizzazione nei tiri da due punti di un giocatore di pallacanestro è del 55%. Si calcolino:

1. la probabilità che segni non più di 50 punti in 50 tiri
2. il numero minimo di tiri che deve effettuare affinchè la probabilità di segnare almeno 100 punti sia non inferiore a 0.9

Soluzione

1. Sia X_{50} la v.a. che indica il numero di canestri su 50 tiri, allora $X_{50} \sim Bin(50, 0.55)$.
   Poichè $np = 27.5 > 5$ e $n(1-p) = 22.5 > 5$, possiamo utilizzare l'approssimazione normale, ossia $X_{50} \simeq N(27.5, 12.375)$. Dunque
   $$P(X_{50} \leq 25) = P(\frac{X_{50} - 27.5}{\sqrt{12.375}} < \frac{25.5 - 27.5}{\sqrt{12.375}}) \simeq \Phi(-0.57) =$$
   $$= 1 - \Phi(0.57) = 0.28$$
2. Detta X_n la v.a. che indica il numero di canestri su n tiri, si chiede di determinare n in modo che risulti $P(X_n \geq 50) \geq 0.9$. Utilizzando l'approssimazione normale si ha $X_n \sim Bin(n, 0.55) \simeq N(n0.55, n0.2475)$. Dunque
   $$0.9 \leq P(X_n \geq 50) = P(X_n > 49.5) = P(\frac{X_n - n0.55}{\sqrt{n}0.2475} > \frac{49.5 - n0.55}{\sqrt{n}0.2475}) \simeq$$
   $$\simeq 1 - \Phi(\frac{49.5 - n0.55}{\sqrt{n}0.2475}),$$
   da cui segue
   $$\Phi(\frac{49.5 - n0.55}{\sqrt{n}0.2475}) \leq 0.1 \Leftrightarrow \frac{49.5 - n0.55}{\sqrt{n}0.2475} \leq z_{0.1} = -1.2816$$
   Risolvendo la disequazione si ottiene $n \geq 101.7$ ossia $n \geq 102$. ∎

2.2

Due dadi equilibrati vengono lanciati 300 volte. Sia X la variabile aleatoria che indica il numero di volte che si è ottenuto un doppio uno.

1. Calcolare $E(X)$ e $Var(X)$

2. Calcolare in modo approssimato la probabilità di ottenere un doppio uno più di 10 volte.

3. Quante volte bisogna lanciare i due dadi affinchè la probabilità di ottenere un doppio uno più di 10 volte sia maggiore di 0.5?

Soluzione

1. Poichè $X \sim B(300, \frac{1}{36})$, si ha che $E(X) = \frac{300}{36} = 8.33$ e $Var(X) = \frac{300}{36} * \frac{35}{36} = \frac{875}{108}$

2. Utilizzando l'approssimazione della binomiale con la normale si ottiene $P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - P(X \leq 10.5) \simeq 1 - P(\frac{X-E(X)}{\sqrt{Var(X)}} \leq \frac{10.5-8.33}{8.10}) = 1 - P(Z \leq 0.76) \simeq 1 - \phi(0.76) \simeq 0.22363$

3. Occorre determinare n tale che $P(X > 10) > 0.5$. Utilizzando nuovamente l'approssimazione normale si ha

$$P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - P(X \leq 10.5) =$$

$$= 1 - P(\frac{X - \frac{n}{36}}{\sqrt{\frac{n35}{36^2}}} \leq \frac{10.5 - \frac{n}{36}}{\sqrt{\frac{n35}{36^2}}}) > 0.5$$

$$\Leftrightarrow P(Z \leq \frac{378 - n}{\sqrt{35n}}) < 0.5 \Leftrightarrow \phi(\frac{378 - n}{\sqrt{35n}}) < 0.5$$

$$\Leftrightarrow \frac{378 - n}{\sqrt{35n}} < 0 \Leftrightarrow n > 378$$

$\blacksquare$

2.3

Si consideri un sistema elettronico composto da $n = 100$ componenti e che funziona se e solo se almeno 30 componenti su 100 funzionano. Si supponga inoltre che tutte le componenti abbiano la stessa probabilità di funzionare $p = 0.2$ e che funzionino indipendentemente una dall'altra.

1. In base al modello dato, qual è il numero atteso di componenti funzionanti? Quanto vale la varianza del numero di componenti funzionanti?

2. Calcolare in modo approssimato la probabilità che il sistema testé descritto funzioni.

3. Fornite una stima della probabilità che il numero di componenti NON funzionanti sia compreso fra 72 e 88 (inclusi).

Soluzione Indicata con X la variabile aleatoria che conta il numero di componenti funzionanti su 100, allora X ha legge binomiale di parametri $p = 0.2$ e $n = 100$. Pertanto,

1. $E(X) = 100 * 0.2 = 20$ e $var(X) = 100 * 0.2 * 0.8 = 16$.

2. $$\begin{aligned}
&= P\{\text{il sistema funziona}\} \\
&= P\{\text{almeno 30 componenti su 100 funzionano}\} \\
&= 1 - P\{\text{al più 29 componenti su 100 funzionano}\} \\
&= 1 - P(X \leq 29) = 1 - P(X \leq 29 + 0.5) \\
&\simeq 1 - \Phi\left(\frac{29.5 - 20}{4}\right) = 1 - \Phi(2.375) \simeq 1 - 0.99123 = 0.00877
\end{aligned}$$

3. $Y = 100 - X$ rappresenta il numero di componenti non funzionanti su 30; Y ha legge binomiale di parametri $q = 1 - 0.2 = 0.8$ e $n = 100$. Segue che il numero medio di componenti NON funzionanti è $100 * 0.8 = 80$ con $var(Y) = 16$.
Come prima, stimiamo la probabilità cercata usando l'approssimazione normale per la legge binomiale e la "correzione di continuità", che migliora l'approssimazione per variabili aleatorie a valori intere. Pertanto,
$$P(72 \leq Y \leq 88) = P(Y \leq 88) - P(Y \leq 72) =$$

$$= P(Y \leq 88 + 0.5) - P(Y \leq 71 + 0.5) \simeq$$
$$\simeq \Phi(\frac{88 + 0.5 - 80}{4}) - \Phi(\frac{71 + 0.5 - 80}{4}) = \Phi(2.125) - \Phi(-2.125) =$$
$$= 2\Phi(2.125) - 1 \simeq 0.9664134.$$

∎

3 Approssimazione normale della distribuzione di Poisson

3.1

Si supponga che il numero di molecole di sodio in un cl. di acqua minerale sia descritto da una v.a. di Poisson con media 1000.

1. Si calcoli la probabilità che 10 cl. di acqua contengano più di 10000 molecole.

SOLUZIONE

1. Sia X la v.a. che indica il numero di molecole di sodio in 10 cl. di acqua, $X \sim P(10000)$. Si deve calcolare $P(X > 10000) = 1 - P(X \leq 10000)$. Approssimando con la Normale si ha

$$1 - P(X \leq 10000) = 1 - P(\frac{X - 10000}{\sqrt{10000}} \leq \frac{10000 - 10000}{\sqrt{10000}}) = 1 - P(Z \leq 0) = 0.5$$

∎

3.2

Il costo di una inserzione sul 'News' è il seguente:
60 centesimi per annunci di lunghezza non superiore a 8 righe
1 euro per annunci di lunghezza superiore a 8 righe ma non superiore a 12
1.25 euro per annunci di lunghezza superiore a 12 righe ma non superiore a 16
1.55 euro per annunci di lunghezza superiore a 16.

Un cinema pubblicizza gli spettacoli sulle pagine del 'News', mediante annunci di lunghezza media (calcolata lungo un anno) pari a 12 righe. Si supponga che la lunghezza delle inserzioni del cinema sia descrivibile con una v.a. di Poisson. Usando l'approssimazione normale si determini il costo medio delle inserzioni.

SOLUZIONE Sia X la v.a. che indica il numero di righe di una inserzione ed Y la v.a. che ne indica il costo. Scrivendo Y in centesimi, si ha che $Y = 60$ se $X \leq 8$, $Y = 100$ se $8 < X \leq 12$, $Y = 125$ se $12 < X \leq 16$, $Y = 155$ se $X > 16$. Allora $E(Y) = 60 * P(X \leq 8) + 100 * P(8 < X \leq 12) + 125 * P(12 < X \leq 16) + 155P(X > 16)$. Utilizzando l'approssimazione normale di $X \sim P(12)$ con la normale $N(12, 12)$ possiamo calcolare le probabilità ad essa relative. Si ha quindi:

$$P(X \leq 8) = P(1 \leq X \leq 8) = P(1 - 0.5 \leq X \leq 8 + 0.5) \simeq$$
$$\simeq P(\frac{0.5 - 12}{\sqrt{12}} \leq Z \leq \frac{8.5 - 12}{\sqrt{12}}) == \Phi(\frac{8.5 - 12}{\sqrt{12}}) - \Phi(\frac{0.5 - 12}{\sqrt{12}}) =$$
$$= \Phi(-1.0104) - \Phi(-2.9641) = 0.156248 - 0.001538 \simeq 0.155.$$

Analogamente si calcolano

$$P(9 \leq X \leq 12) \simeq P(\frac{8.5 - 12}{\sqrt{12}} \leq Z \leq \frac{12.5 - 12}{\sqrt{12}}) =$$
$$= \Phi(\frac{12.5 - 12}{\sqrt{12}}) - \Phi(\frac{8.5 - 12}{\sqrt{12}}) \simeq 0.401$$

e

$$P(13 \leq X \leq 16) \simeq 0.345.$$

Si ha poi che $P(X > 16) = 1 - P(X \leq 15) \simeq 1 - \Phi(\frac{15.5-12}{\sqrt{12}}) = 1 - \Phi(1.010) = 0.156$.

Sostituendo si ottiene $E(Y) = 60 * 0.155 + 100 * 0.401 + 125 * 0.345 + 155 * 0.156 = 665.4050$ centesimi di euro ▮

4 Approssimazione normale e Poisson della distribuzione Binomiale

4.1

In media in un paracadute su 1000 il paracadute principale è difettoso e non si apre durante il lancio. Un paracadutista professionista compie 4000 lanci nella sua carriera; indichiamo con X la variabile aleatoria che conta il numero di volte in cui il paracadute principale non si apre.

1. Se si approssima la distribuzione di X con una Normale, quanto vale la probabilità che il paracadute principale non si apra in almeno uno dei 4000 lanci?

2. Quanto vale la probabilità appena calcolata, se si approssima la distribuzione di X con una Poisson?

3. Quale delle due approssimazione è migliore?

Soluzione La X è una var. Binomiale di parametri $n = 4000$ e $p = \frac{1}{1000} = 0,001$

1. In approssimazione Normale, risulta $X \simeq Y \sim N \sim (np, np(1-p))$, cioè $Y \simeq N(4, 3.996)$. Dunque $P(X \geq 1) = P(X > 0) \simeq P(Y > 0.5) = P(\frac{Y-4}{\sqrt{3.996}} > \frac{0.5-4}{\sqrt{3.996}}) = \Phi(1.75) = 0.95994$

2. In approssimazione Binomiale, risulta $X \simeq W \sim P(n * p)$, cioè $W \sim P(4)$. Dunque $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \simeq 1 - P(W = 0) = 1 - e^{-4} = 0.9816$

3. La migliore approssimazione è la seconda: infatti, il numero esatto calcolato con la Binomiale è $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (0.999)^{4000} = 0.9817$.∎