# Introduzione all'analisi combinatoria

D. Bertacchi[1] - F. Zucca[2]
[1] Università di Milano - Bicocca
Dipartimento di Matematica e Applicazioni
Via Bicocca degli Arcimboldi 8, 20126 Milano, Italy.
[2]Politecnico di Milano
Dipartimento di Matematica F. Brioschi
Piazza Leonardo Da Vinci 32, 20133 Milano, Italy.

## 1. Preliminari

Questa raccolta di appunti si propone di formalizzare e studiare brevemente i concetti fondamentali dell'analisi combinatoria. L'analisi combinatoria si occupa di "contare" il numero degli elementi di particolari insiemi; il numero degli elementi di un insieme è detto *cardinalità* dello stesso. Nel seguito indicheremo, salvo diversa precisazione, con $S$ un insieme di cardinalità $n$. Per i nostri scopi la natura degli elementi di $S$ sarà irrilevante, perciò possiamo porre $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Inoltre indicheremo con $\mathrm{card}\,(J)$ oppure con $|J|$ la cardinalità di qualsiasi insieme $J$.

**Definizione 1.1.** Sia $r \in \mathbb{N}$, un elemento di $S^r = \underbrace{S \times \cdots \times S}_{r \text{ volte}}$ è detto *disposizione* di $r$ elementi di $S$.

**Definizione 1.2.** Dato un qualsiasi insieme $M$ indichiamo con $\Sigma_M$ l'insieme delle biiezioni di $M$ in sé e chiameremo *permutazioni* i suoi elementi. ($\Sigma_M$ è quindi costituito da tutti i possibili riordinamenti di $M$). In particolare se $M := \{1, 2, \ldots, r\}$ e $v \in S^r$ allora per ogni $\sigma \in \Sigma_{\{1,2,\ldots,r\}}$ si definisce $f_\sigma : S^r \to S^r$ tale che $(f_\sigma(v))_i := v_{\sigma(i)}$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, r$.

Introduciamo ora la seguente relazione di equivalenza fra le disposizioni dello stesso ordine. Siano $v, w \in S^r$, diremo che

$$v \sim w \quad \text{se} \quad \exists\, \sigma \in \Sigma_{\{1,2,\ldots,r\}} \, : \, f_\sigma(v) = w,$$

dove $v = (v_1, v_2, \ldots, v_r)$, $w = (w_1, w_2, \ldots, w_r)$. In altre parole $v \sim w$ se si possono ottenere l'una dall'altra riordinandone gli elementi.

**Esempio.** $(1, 1, 2) \sim (1, 2, 1)$ in $\{1, 2\}^3$.

Indicheremo con $S^r_{/\sim}$ l'insieme delle classi di equivalenza, con $[v] = \{w \in S^r \, : \, w \sim v\}$ e con $\pi : S^r \to S^r_{/\sim}$ la proiezione naturale (cioè $\pi(x) = [x]$).

**Definizione 1.3.** Un elemento di $S^r_{/\sim}$ è detto *combinazione* di $r$ elementi di $S$.

Dunque due disposizioni diverse differiscono o per la presenza di elementi diversi di $S$ o per il loro ordine; due combinazioni invece differiscono solo se gli elementi di $S$ che le compongono sono diversi, l'ordine non ha rilevanza.

**Esempio.** Sia $S = \{1, 2\}$ e $r = 2$:
$[(1, 1)] = \{(1, 1)\}$
$[(1, 2)] = \{(1, 2), (2, 1)\}$
$[(2, 2)] = \{(2, 2)\}$

In seguito, salvo casi di ambiguità, ometteremo le parentesi [ ].

**Osservazione 1.4.** Dati $v, w \in S^r = \{1, 2, \ldots, n\}^r$, condizione necessaria e sufficiente affinché $v \sim w$ è che $i$ compaia $r_i$ volte sia in $v$ che in $w$, per ogni $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$; $0 \leq r_i \leq r$; $\sum_{i=1}^{n} r_i = r$.

L'analisi combinatoria si occupa del calcolo della cardinalità di sottoinsiemi di $S^r$ e di $S^r_{/\sim}$ (ad esempio calcoleremo, data una disposizione $v$, $\operatorname{card}([v]) = \operatorname{card}(\pi^{-1}([v]))$).

Per questi calcoli saranno utili alcuni principi abbastanza ovvi, che preferiamo evidenziare qui di seguito.

**Principio di addizione.** Se $H = \bigcup_{i=1}^{k} S_i$ e $S_i \cap S_j = \emptyset$ se $i \neq j$, allora $\operatorname{card} H = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{card} S_i$.

**Principio di moltiplicazione.** Se $A = \{(a_1, a_2)\}$ dove si hanno $m$ scelte per $a_1$ (cioè $a_1 \in \{1, \ldots, m\}$ e per ogni scelta di $a_1$ si hanno $n$ scelte per $a_2$ (cioè $a_2 \in \{1, \ldots, n\}$), allora $\operatorname{card} A = mn$.

**Principio del quoziente.** Sia $S$ un insieme tale che $\operatorname{card} S = n$ e $\sim$ una qualsiasi relazione di equivalenza tra gli elementi di $S$. Se per ogni $v \in S$, $\operatorname{card}([v]) = k$, allora $\operatorname{card} S^r_{/\sim} = \frac{n}{k}$.

**Osservazione 1.5.** Per calcolare la cardinalità di sottoinsiemi di $S^r$ o di $S^r_{/\sim}$, è alle volte conveniente mettere tali sottoinsiemi in corrispondenza biunivoca con insiemi di cardinalità nota, ovvero, se $H \subset S^r$ ($H \subset S^r_{/\sim}$), sfruttare

$$\operatorname{card} H = \operatorname{card} H_1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, f : H \to H_1 \text{ iniettiva e suriettiva.}$$

## 2. Disposizioni con ripetizione

In questo paragrafo ci interessano tutte le disposizioni; quindi ammetteremo la possibilità di ripetere un elemento. Quello che stiamo cercando è quindi la cardinalità dell'insieme $S^r$; la seguente elementare proposizione risponde alla questione.

**Proposizione 2.1.** *Se* $\operatorname{card} S = n$, *allora* $\operatorname{card} S^r = n^r$.

**Dimostrazione.** Per induzione applicando il principio di moltiplicazione.

□

**Osservazioni**

1) $n^r$ è anche la cardinalità dell'insieme delle funzioni $f : \{1, \ldots, r\} \to S$ (infatti possiamo stabilire una corrispondenza biunivoca fra $S^r$ e queste funzioni associando alla disposizione $(i_1, \ldots, i_r)$ la funzione $f$ tale che $f(j) = i_j$).
2) $n^r$ è anche il numero di modi in cui possiamo pescare $n$ oggetti distinti da un'urna, pescando $r$ volte e rimettendo ogni volta l'oggetto pescato nell'urna.

## 3. Disposizioni semplici

Sia $\operatorname{card} S = n$. Chiamiamo insieme delle disposizioni semplici il sottoinsieme di $S^r$ costituito da disposizioni in cui ogni elemento di $S$ compare al più una volta (perciò deve essere $r \leq n$).

**Proposizione 3.1.** *Il numero totale delle disposizioni semplici di $n$ elementi in $r$ posti si indica con $D_r^n$ ed è pari a $\frac{n!}{(n-r)!}$. (Ricordiamo la convenzione $0! = 1$).*

**Dimostrazione.** Procediamo per induzione su $r$. Per $r = 1$ la tesi è verificata. Sia vera per $r - 1$, dimostriamola per $r$. Fissata una disposizione semplice di lunghezza $r - 1$ ne otteniamo una di lunghezza $r$ aggiungendo uno qualsiasi degli $n - r + 1$ elementi non presenti. Applicando il principio di moltiplicazione e l'ipotesi di induzione si ottiene che

$$D_r^n = \frac{n!}{(n-r+1)!}(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

□

**Osservazioni**

1) $D_r^n$ è anche la cardinalità dell'insieme delle funzioni $f : \{1, \ldots, r\} \to S$ che siano iniettive.
2) $D_r^n$ è anche il numero di modi in cui possiamo pescare $n$ oggetti distinti da un'urna, pescando $r$ volte senza rimettere l'oggetto pescato nell'urna.
3) Nel caso particolare in cui $r = n$, $D_n^n = n!$ fornisce la cardinalità dell'insieme delle funzioni da $S$ in sé, che siano biunivoche, ovvero $\operatorname{card} \Sigma_S = n!$.

## 4. Combinazioni semplici

Sia ancora $\operatorname{card} S = n$. Chiamiamo insieme delle combinazioni semplici il sottoinsieme di $S^r_{/\sim}$ costituito da combinazioni in cui ogni elemento di $S$ compare al più una volta (perciò deve essere $r \leq n$).

**Proposizione 4.1.** *Il numero totale delle combinazioni semplici di $n$ elementi in $r$ posti si indica con $C_r^n$ ed è pari a $\frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{D_r^n}{r!}$.*

**Dimostrazione.** Osserviamo che se $v$ è semplice allora $\operatorname{card}([v]) = r!$, infatti le disposizioni a lei equivalenti si ottengono riordinandone gli elementi, e questo si può fare in $r!$ modi. Perciò applicando il principio del quoziente $C_r^n = \frac{D_r^n}{r!}$.

$\square$

**Definizione** $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ si indica anche con $\binom{n}{r}$ e si chiama *coefficiente binomiale.*

## 5. Altre interpretazioni e proprietà del coefficiente binomiale

a) $\binom{n}{r}$ è il numero di ripartizioni differenti di una popolazione di $n$ individui in due sottopopolazioni composte rispettivamente da $r$ e $n-r$ individui ciascuna.

**Dimostrazione.** Si mettono in corrispondenza biunivoca le ripartizioni con le combinazioni, associando alla ripartizione $(\{i_1, \dots, i_r\}, S \setminus \{i_1, \dots, i_r\})$ la combinazione $(i_1, \dots, i_r)$.

$\square$

È da far rilevare che all'interno della sottopopolazione l'ordine non importa, mentre l'ordine delle sottopopolazioni sì. Ad esempio, se $n = 2$ e $r = 1$, le ripartizioni sono due: $(\{1\}, \{2\})$ e $(\{2\}, \{1\})$.

b) $\binom{n}{r}$ è il numero di disposizioni in $n$ posti di $S' = \{1, 2\}$ dove 1 si ripete $r$ volte e 2 $n-r$ volte.

**Dimostrazione.** Consideriamo l'insieme delle combinazioni semplici di $\{1, \dots, n\}$ in $r$ posti (sappiamo che tali combinazioni sono $\binom{n}{r}$), e mettiamo tale insieme in corrispondenza biunivoca con il nostro insieme di ripartizioni. La tesi sarà così dimostrata.

Associamo ad ogni combinazione $[(i_1, \dots, i_r)]$ la disposizione $(j_1, \dots, j_n)$ dove $j_k = 1 \Leftrightarrow k \in \{i_1, \dots, i_r\}$. Si dimostra facilmente che tale corrispondenza è ben definita e biiettiva.

$\square$

c) **Teorema binomiale**

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r y^{n-r}.$$

**Dimostrazione.** È un caso particolare del teorema multinomiale che vedremo più avanti.

$\square$

d) **Formula di Pascal**

$$\begin{cases} \binom{n}{0} = \binom{n}{n} \\ \binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} \qquad n > 1; r \neq 0, n \end{cases}$$

**Dimostrazione.** È una banale verifica, oppure si può vedere come caso particolare della formula di Pascal generalizzata che vedremo più avanti.

□

e) **Triangolo di Tartaglia** Ricordiamo la costruzione del triangolo di Tartaglia:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \end{array}$$

Chiamiamo $T_k^n$ il $k$-esimo termine dell'$n$-esima riga, numerando le righe ed i termini partendo da zero. Allora per costruzione $T_0^n = T_n^n = 1 \ \forall n$; $T_k^n = T_{k-1}^{n-1} + T_k^{n-1}$. Quindi, applicando la formula di Pascal, si ottiene che $T_k^n = \binom{n}{k}$.

Un'altra interpretazione di $T_k^n$ è quella di vedere tale coefficiente come il numero di percorsi discendenti che portano dalla cima del triangolo all'elemento $k$-esimo dell'$n$-esima riga (pensando che all'interno di un percorso dal termine di posto $(k, n)$ si possa passare solo a quello di posto $(k, n+1)$ oppure $(k+1, n+1)$). Infatti in tal modo se $A_{k,n}$ è l'insieme dei percorsi fino a $(k, n)$, $B_{k,n}$ è l'insieme dei percorsi fino a $(k, n)$ tali che il penultimo passo è in $(k-1, n-1)$ e $C_{k,n}$ è l'insieme dei percorsi fino a $(k, n)$ tali che il penultimo passo è in $(k, n-1)$

$$A_{k,n} = B_{k,n} \cup C_{k,n}$$

e tale unione è disgiunta.

## 6. Coefficiente multinomiale

Fissata una combinazione $C$ di $r$ elementi di $S$, in cui l'$i$-esimo elemento di $S$ compaia $r_i$ volte ($i \in \{1, \dots, n\}$ e $\sum_{i=1}^{n} r_i = r$), ci chiediamo quante sono le disposizioni che si possono ottenere con i suoi elementi, ovvero cerchiamo

$$\operatorname{card} \{v \in S^r \ : \ \pi(v) = C\}.$$

**Proposizione 6.1.** *Data una disposizione $v$ tale che l'$i$-esimo elemento di $S$ vi compaia $r_i$ volte ($i \in \{1, \ldots, n\}$ e $\sum_{i=1}^n r_i = r$) e posto per definizione*

$$C^r_{r_1,\ldots,r_n} = \binom{r}{r_1 \ldots r_n} = \frac{r!}{\prod_{i=1}^n r_i!}$$

*(tale quantità è detta coefficiente multinomiale), allora*

$$\operatorname{card}\left([\pi(v)]\right) = C^r_{r_1,\ldots,r_n}.$$

**Dimostrazione.** Dimostriamo dapprima che l'insieme di disposizioni $\{\pi^{-1}([\pi(v)]) : v \in S^r\}$ è in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle ripartizioni di una popolazione di $r$ individui in $n$ sottopopolazioni di $r_1, \ldots, r_n$ individui rispettivamente. Associamo infatti alla disposizione $v = (v_1, \ldots, v_r)$ tale che $\operatorname{card}\{i : v_i = j\} = r_j$ (per ogni $j = 1, \ldots, n$) la ripartizione di $\{1, \ldots, r\}$ nelle $n$ sottopopolazioni $\{i : v_i = j\}$ (per ogni $j = 1, \ldots, n$). Associamo cioè alla disposizione $v$ (dove $j$ compare $r_j$ volte) la ripartizione di $\{1, \ldots, r\}$ in $n$ sottopopolazioni costituite la prima da $r_1$ individui, la seconda da $r_2$ individui, e così via, in modo che nella prima sottopopolazione vi siano gli indici $i \in \{1, \ldots, r\}$ tali che $v_i = 1$, nella seconda gli indici tali che $v_i = 2$, e così via. Si dimostra che tale corrispondenza è biunivoca.

Calcoliamo ora la cardinalità di questo insieme di ripartizioni: lo facciamo per induzione. Sappiamo già che per $n = 2$ la formula è vera. Supponiamo sia vera per $n - 1$ e dimostriamolo per $n$.

Suddividiamo la popolazione di $r$ individui in due sottopopolazioni di $r - r_n$ ed $r_n$ individui; il numero di tali suddivisioni è

$$\frac{r!}{r_n!(r - r_n)!}.$$

Per ognuna di queste suddivisioni dividiamo la popolazione di $r - r_n$ individui in $n - 1$ sottopopolazioni di $r_1, \ldots, r_{n-1}$ individui, per ipotesi di induzione lo possiamo fare in

$$\frac{(r - r_n)!}{\prod_{i=1}^{n-1} r_i!}$$

modi. Applicando il principio di moltiplicazione si ottiene la tesi.

$\square$

## 7. Altre interpretazioni e proprietà del coefficiente multinomiale

a) $\binom{r}{r_1 \ldots r_n}$ è il numero di ripartizioni differenti di una popolazione di $r$ individui in $n$ sottopopolazioni di $r_i$ ($i = 1, \ldots, n$) individui ciascuna.

(La dimostrazione è inclusa nella dimostrazione precedente).

b) $\begin{pmatrix} r \\ r_1 \ldots r_n \end{pmatrix}$ è il numero di disposizioni di $r$ oggetti differenti in $n$ contenitori in modo che nell'$i$-esimo contenitore vi siano $r_i$ oggetti.
**Dimostrazione.** Basta vedere i contenitori come sottopopolazioni.

□

c) **Teorema multinomiale**

$$(x_1 + \ldots + x_n)^r = \sum_{\substack{r_i \geq 0 \\ r_1 + \cdots + r_n = r}} \begin{pmatrix} r \\ r_1 \ldots r_n \end{pmatrix} x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n}. \tag{1}$$

**Dimostrazione.** Ogni addendo dello sviluppo è un prodotto i cui fattori sono $r$ e vengono scelti fra $x_1, \ldots, x_n$. Gli addendi sono tanti quante sono le disposizioni di $n$ oggetti in $r$ posti, cioè $n^r$. Possiamo raccogliere alcuni addendi, più precisamente si raccolgono fra loro tutti quelli che coincidono a meno dell'ordine dei fattori. Questo conduce alla tesi, poiché il fattore $x_1^{r_1} \ldots x_n^{r_n}$ compare tante volte tante quante sono le disposizioni in $\{x_1, \ldots, x_n\}^r$ in cui $x_i$ compare $r_i$ volte, ovvero $\begin{pmatrix} r \\ r_1 \ldots r_n \end{pmatrix}$ volte.

□

d) **Formula di Pascal generalizzata**

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \ldots 0 \end{pmatrix} = 1 \\ \begin{pmatrix} r \\ r_1 \ldots r_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1,\ldots,n; r_i \geq 1} \begin{pmatrix} r-1 \\ r_1 \ldots r_i - 1 \ldots r_n \end{pmatrix} \end{cases}$$

**Dimostrazione.** La prima uguaglianza è banalmente vera. Osserviamo che ogni disposizione di $r$ elementi di $S$, in cui il $j$-esimo elemento di $S$ compaia $r_j$ volte ($j \in \{1, \ldots, n\}$ e $\sum_{j=1}^{n} r_j = r$) si ottiene fissando l'elemento che compare al primo posto (sia per fissare le idee l'$i$-esimo) e attaccandoci una disposizione di $r-1$ elementi di $S$, dove il $j$-esimo elemento di $S$ compaia $r_j$ volte ($j \neq i$) e l'$i$-esimo compaia $r_i - 1$ volte.

□

## 8. Combinazioni con ripetizione

Chiamiamo insieme delle combinazioni di $r$ elementi di $S$ con ripetizione l'insieme costituito da tutte le combinazioni in $S^r_{/\sim}$, ammettendo anche che gli elementi di $S$ si ripetano (se $r \leq n$ questo insieme contiene quello delle combinazioni semplici).

**Proposizione 8.1.** *Se* $\operatorname{card} S = n$, *allora* $\operatorname{card} S^r_{/\sim} = \begin{pmatrix} n+r-1 \\ r \end{pmatrix}$.

**Dimostrazione.** Data una combinazione, la ordiniamo in modo che i suoi elementi si presentino in maniera non decrescente. Sia essa $(i_1, \ldots, i_r)$ con $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_r \leq n$: le associamo la $(r+1)$-upla $i_1 - 1, i_2 - i_1, i_3 - i_2, \ldots, i_r - i_{r-1}, n - i_r)$. Questa applicazione è biiettiva nell'insieme delle disposizioni di $r + 1$ numeri non negativi (ovvero $\tilde{S}^{r+1}$, dove $\tilde{S} = \{0, \ldots, n\}$), la cui somma è pari a $n - 1$.

Pensiamo ogni $(r + 1)$-upla come disposizione di $(n - 1)$ palline (uguali fra loro) e $r$ separatori (uguali fra loro), nel seguente modo:

$$\underbrace{\bigcirc\bigcirc\cdots\bigcirc}_{i_1-1}\rule{3pt}{10pt}\underbrace{\bigcirc\cdots\bigcirc}_{i_2-i_1}\rule{3pt}{10pt}\cdots\rule{3pt}{10pt}\underbrace{\bigcirc\cdots\bigcirc}_{n-i_r}$$

Anche questa identificazione è biiettiva. Ora, il numero di disposizioni di due oggetti (pallina e separatore) in $n + r - 1$ posti, in modo che i primi siano ripetuti $n - 1$ volte e i secondi $r$ volte è, come abbiamo già visto, $\binom{n+r-1}{r}$.

$\square$

**Osservazioni**

a) Con tecnica analoga, si può mostrare che $\binom{n+r-1}{r}$ è anche il numero di differenti disposizioni di $r$ oggetti identici in $n$ contenitori.
b) Utilizzando l'osservazione precedente ed interpretando nell'eq. (1) $r_i$ come il numero di palline contenute nel contenitore $i$ (per ogni $i = 1, 2 \ldots, n$, si vede immediatamente che $\binom{n+r-1}{r}$ risulta altresì il numero di addendi della somma che compare nell'eq. (1) (dopo aver raccolto i termini simili).

## 9. Differenza dal punto di vista probabilistico fra disposizioni e combinazioni

Spesso, nei problemi di calcolo combinatorio che richiedano il calcolo di determinate probabilità, la difficoltà consiste nel capire se sono le disposizioni o le combinazioni ad essere equiprobabili.

Ricordiamo che in questo ambito (cioè dove lo spazio di probabilità è discreto) la probabilità di un evento è il rapporto fra il numero di casi favorevoli e il numero di casi possibili.

Un esempio in cui sono le disposizioni ad essere equiprobabili e non le combinazioni è dato dal cosiddetto paradosso di De Mèrè. De Mèrè era un giocatore d'azzardo che aveva notato che, lanciando tre dadi e sommando i numeri apparsi, il risultato è più frequentemente 11 che 12. Questo fatto era per lui paradossale in quanto le combinazioni che danno luogo a queste somme sono 6 in entrambi i casi:

$$146,\ 155,\ 236,\ 245,\ 335,\ 344$$

si sommano a 11, mentre

$$156,\ 246,\ 255,\ 336,\ 345,\ 444$$

si sommano a 12.

L'errore sta appunto nell'aver considerato le combinazioni come equiprobabili. Sono invece le disposizioni ad esserlo, poiché i lanci di dadi sono indipendenti fra loro. Calcolando quante sono le disposizioni che si sommano a 11, si ottiene

$$3 \times 3! + 3 \times \frac{3!}{2!} = 27$$

(si osservi che tre combinazioni sono semplici, tre hanno due termini uguali), mentre le disposizioni che si sommano a 12 sono

$$3 \times 3! + 2 \times \frac{3!}{2!} + 1 \times \frac{3!}{3!} = 25$$

(si osservi che tre combinazioni sono semplici, due hanno due termini uguali, una ha tutti i termini uguali).

Tuttavia si può dare un criterio sufficiente affinché l'equiprobabilità delle disposizioni implichi quella delle combinazioni.

**Proposizione 9.1.** *Siano $H$ l'insieme delle disposizioni favorevoli e $K$ l'insieme di quelle possibili, e valga che*

$$\forall v \in H, w \in K, \quad \operatorname{card}\{\pi^{-1}(v) \cap H\} = \{\pi^{-1}(w) \cap K\} = \rho$$

*dove $\rho$ è una costante, allora $\frac{\operatorname{card}(H)}{\operatorname{card}(K)} = \frac{\operatorname{card}(\pi(H))}{\operatorname{card}(\pi(K))}$ (ovvero la probabilità calcolata supponendo equiprobabili le disposizioni coincide con quella che si ha utilizzando le combinazioni).*

**Dimostrazione.** Utilizzando il principio del quoziente si ha che $\operatorname{card}(\pi(H)) = \operatorname{card}(H)/\rho$, e $\operatorname{card}(\pi(K)) = \operatorname{card}(K)/\rho$, da cui la tesi.

□

**Esempio.** Se $K$ è l'insieme delle disposizioni semplici, e $H$ è tale che $v \in H \Rightarrow \{[v]\} \subset H$, allora il criterio è applicabile.

**Esempio.** Un altro esempio è dato dal gioco del lotto, in cui si giochi una cinquina e ci si chieda la probabilità di vincere. Ricordiamo che al lotto si estraggono cinque numeri da 1 a 90 e una volta estratto un numero questo viene messo da parte (non può cioè essere estratto due volte).

Si hanno due modi per rispondere alla domanda:

a) $K$ è l'insieme delle disposizioni semplici di 5 oggetti scelti fra 90: $\operatorname{card}(K) = \frac{90!}{85!}$. I casi favorevoli sono 5! (tanti quanti sono i modi di riordinare la cinquina giocata), e quindi
$$P = \frac{5!85!}{90!} = \frac{1}{\binom{90}{5}}.$$

b) $K$ è l'insieme delle combinazioni semplici di 5 oggetti scelti fra 90: $\operatorname{card}(K) = \binom{90}{5}$.

I casi favorevoli sono 1 (che corrisponde alla cinquina giocata), e quindi

$$P = \frac{1}{\binom{90}{5}}.$$

E infatti qui $\operatorname{card}(\pi^{-1}([v])) = 5!\ \forall v$ e $v \in H \Leftrightarrow \pi^{-1}([v]) \subset H$.

Non sempre sono le disposizioni però ad essere equiprobabili, come si può verificare svolgendo il seguente esercizio.

**Esercizio**

Si estragga un numero casuale da 1 a 6 e lo si chiami $x_1$; si estragga poi un numero casuale fra 0 e 6 e lo si chiami $x_2$. Se $x_2 \neq 0$ si consideri estratta la coppia $(x_1, x_2)$; se $x_2 = 0$, si consideri estratta la coppia $(x_1, x_1)$. Verificare che le combinazioni sono equiprobabili, le disposizioni no.

## 10. Principio di inclusione-esclusione

Si supponga che $A$ sia un insieme di elementi e $P = \{P_i\}$ un insieme di proprietà che possono essere godute dagli elementi di $A$. Definiamo, per ogni $S \subset P$

$$\begin{aligned} N_{\geq}(S) = &\quad \mathrm{card}\,\{v \in A \,:\, v \text{ soddisfa tutte le } P_i \in S\} \\ N_{=}(S) = &\quad \mathrm{card}\,\{v \in A \,:\, v \text{ soddisfa tutte e sole le } P_i \in S\} \end{aligned}$$

**Osservazione**

$N_{\geq}(\emptyset) = \mathrm{card}\,(A)$.

Spesso è facile calcolare le $N_{\geq}(S)$, meno facile è il calcolo di $N_{=}(S)$, perciò è utile saper ricavare $N_{=}(S)$ dalla conoscenza di $N_{\geq}(J)$ per opportuni insiemi $J$.

**Teorema 10.1 (principio di inclusione-esclusione).** *Posto* $|L| = \mathrm{card}\,(L)$, *per ogni* $S \subset P$ *si ha che*

$$N_{=}(S) = \sum_{S \subset J \subset P} (-1)^{|J|-|S|} N_{\geq}(J)$$

**Dimostrazione.** Osserviamo che

$$\sum_{S \subset J \subset P} (-1)^{|J|-|S|} N_{\geq}(J) = \sum_{i=0}^{|P|-|S|} \sum_{\substack{S \subset J \subset P \\ |J| = i+|S|}} (-1)^i N_{\geq}(J).$$

Se c'è una proprietà in $S$, non soddisfatta da $v$, allora $v$ non viene contato nella sommatoria. Se $v$ soddisfa tutte e sole le proprietà di $S$, allora $v$ è contato una sola volta (per $J = S$), perché se $J$ contiene propriamente $S$ si richiede che $v$ soddisfi almeno una proprietà in più. Se $v$ soddisfa esattamente $k$ proprietà in più rispetto a quelle di $S$ (soddisfi le proprietà in $S \cup \{P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}\}$) allora viene contato in $N_{\geq}(J)$ se e solo se $S \subset J$ e $J \subset S \cup \{P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}\}$. Se $|J| = i + |S|$, si ottengono $\binom{k}{i}$ insiemi $J$; infatti $J$ si ottiene unendo ad $S$ $i$ proprietà fra le $\{P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}\}$.

Fissato $i$, dunque $v$ è contato $(-1)^i \binom{k}{i}$ volte, facendo variare $i$ tra 0 e $k$, è contato un numero totale di volte pari a

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} = (1 + (-1))^k = 0.$$

$\square$

**Corollario 10.2.** *Se per ogni $J$ tale che $S \subset J \subset P$ si ha che $N_{\geq}(J) = N_{\geq}(|J|)$, cioè dipende solo dalla cardinalità di $J$, allora*

$$N_{=}(S) = \sum_{i=0}^{|P|-|S|} (-1)^i \binom{|P|-|S|}{i} N_{\geq}(i+|S|)$$

**Dimostrazione.** Poiché $\operatorname{card}\{J \subset P \,:\, S \subset J, |J| = |S| + i\} = \binom{|P|-|S|}{i}$, ne segue

$$\begin{aligned} N_{=}(S) = \quad & \textstyle\sum_{i=0}^{|P|-|S|} \sum_{S\subset J\subset P, |J|=i+|S|} (-1)^i N_{\geq}(|J|) = \\ & \textstyle\sum_{i=0}^{|P|-|S|} (-1)^i \binom{|P|-|S|}{i} N_{\geq}(i+|S|) \end{aligned}$$

$\square$

Vediamo due applicazioni del principio di inclusione-esclusione.

a) Siano $X = \{1, \ldots, m\}$ e $Y = \{1, \ldots, k\}$. Ci si chiede quante siano le funzioni da $X$ in $Y$ suriettive.

Siano $A$ l'insieme di tutte le funzioni da $X$ in $Y$ e $B$ quello delle funzioni suriettive: sappiamo già che $|A| = k^m$. Affinché ci siano funzioni suriettive è necessario che sia $k \leq m$. Sia inoltre $Im(f) := \{f(i) \in Y \,:\, i \in X\}$. Definiamo $P_i = \{i \notin Im(f)\}$, $i = 1, \ldots, k$: si tratta di un insieme di proprietà che possono essere soddisfatte o meno dagli elementi di $A$. Si ha che $\operatorname{card}(B) = N_{=}(\emptyset)$. Sia inoltre $J = \{P_{i_1}, \ldots, P_{i_h}\}$ una qualsiasi $h$-upla di proprietà, allora $N_{\geq}(J) = (k-h)^m$. Infatti $f$ soddisfa $P_{i_1}, \ldots, P_{i_h}$ se e solo se $f : X \mapsto Y \setminus \{i_1, \ldots, i_h\}$ e $\operatorname{card}(Y \setminus \{i_1, \ldots, i_h\}) = k - h$. Inoltre $N_{\geq}(\emptyset) = k^m$, dunque $N_{\geq}(J)$ dipende solo da $|J|$; applicando il corollario si ha:

$$N_{=}(\emptyset) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^k \binom{k}{i} (k-i)^m.$$

b) Sia $X = \bigcup_{k=1}^{n} X_k$, $X \subseteq A$, vale la seguente

$$|X| = \sum_{k=1}^{n} |X_k| - \sum_{i<j} |X_i \cap X_j| + \sum_{i<j<k} |X_i \cap X_j \cap X_k| - \cdots (-1)^n |X_1 \cap \cdots \cap X_n|.$$

Si ponga $P_k = \{v \in X_k\}$, $k = 1, \ldots, n$: $N_{\geq}(\emptyset) = |A|$, $N_{=}(\emptyset) = |X^c|$. Dunque $|X| = N_{\geq}(\emptyset) - N_{=}(\emptyset)$, e

$$N_{=}(\emptyset) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{J\subset P, |J|=k} (-1)^k N_{\geq}(J) = N_{\geq}(\emptyset) - \sum_{|J|=1} N_{\geq}(J) + \sum_{|J|=2} N_{\geq}(J) - \cdots$$

da cui si ottiene la tesi, osservando che se $J = \{P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}\}$ allora $N_{\geq}(J) = \operatorname{card}(X_{i_1} \cap \cdots \cap X_{i_k})$.

**ESERCIZI**

1) Un treno ha $n$ carrozze. Sulla banchina vi sono $r$ passeggeri. Qual è la probabilità che ogni passeggero salga su una differente carrozza, supponendo che la scelta avvenga in modo indipendente per ogni passeggero?
2) Qual è la probabilità che due carte prese a caso da un mazzo di 52 siano entrambe assi?
3) In un teatro vi sono $n+k$ sedie. Se ne fissino $m$; qual è la probabilità che le sedie scelte vengano occupate se $n$ persone entrano nel teatro e indipendentemente l'una dall'altra scelgono dove sedersi?
4) Una città di $n$ abitanti è divisa in $l$ quartieri (rispettivamente di $n_1, n_2, \ldots, n_l$ abitanti). Qual è la probabilità, scegliendo $k$ abitanti a caso, che $k_1$ vengano dal primo quartiere, ..., $k_l$ dall'$l$-esimo quartiere? Supponiamo poi di non conoscere $n_1, n_2, \ldots, n_l$, ma solo $n$. Estraiamo a caso $k$ abitanti e osserviamo che $k_1$ provengono dal primo quartiere, ..., $k_l$ dall'$l$-esimo. Qual è la probabilità che gli abitanti dei vari quartieri siano $n_1, \ldots, n_k$? (La seconda parte di questo quesito richiede la conoscenza della formula di Bayes).
5) Lanciando $6n$ volte un dado, qual è la probabilità che ogni faccia esca $n$ volte?
6) Distribuendo le 52 carte fra 4 giocatori, qual è la probabilità che ognuno di essi abbia un asso?
7) In un locale entrano $n$ persone e lasciano nel guardaroba i loro $n$ soprabiti. All'uscita riprendono i soprabiti a caso. Qual è la probabilità che ognuno abbia il proprio? Qual è la probabilità che nessuno abbia preso il proprio?
8) Quanti sono i numeri fra 1 e 1000 che non sono divisibili per $2, 3, 5$ oppure 7?
9) Una carovana di $n$ cammelli viaggia in fila verso la Mecca. Al ritorno si vogliono ridisporre i cammelli in modo che nessuno sia preceduto da quello che lo precedeva all'andata. In quanti modi è possibile farlo?

**SOLUZIONI**

1) Il numero totale degli eventi è pari al numero delle disposizioni con ripetizione che si ottengono con $n$ oggetti presi $r$ volte, cioè $n^r$, il numero di quelli favorevoli è pari al numero delle disposizioni semplici, cioè $\frac{n!}{(n-r)!}$. Dunque la probabilità richiesta è: $\frac{n!}{n^r(n-r)!}$. (Notare che le combinazioni non sono equiprobabili, per convincersene provare il caso $n = 3$ e $r = 2$, con la convenzione che la coppia $(i, j)$ indichi che il primo passeggero sceglie la carrozza $i$ e il secondo la $j$).
2) Il numero totale degli eventi è pari al numero delle coppie (non ordinate) che si ottengono con 52 oggetti, cioè $\begin{pmatrix} 52 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{52\cdot 51}{2}$, il numero di quelli favorevoli è pari al numero delle coppie (non ordinate) che si ottengono con 4 oggetti (gli assi), cioè $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{4\cdot 3}{2}$. Dunque la probabilità richiesta è: $\frac{3}{13\cdot 51}$.
3) Una delle possibili soluzioni è schematizzabile nel modo seguente: si supponga di avere $n+k$ caselle che rappresentino i posti del teatro, in cui le prime $m$ siano quelle fissate (questa ipotesi non lede la generalità) e si riempiano $n$ di queste caselle con un 1, a indicare che il posto rappresentato da quella casella è stato occupato da una persona, le altre $k$ si riempiano con uno 0. Il numero totale degli eventi è pari al numero delle disposizioni con ripetizione di 2 oggetti (0 e 1), presi $n + k$ volte e dove il primo compare $k$ volte, il secondo $n$, cioè $\begin{pmatrix} n+k \\ k \end{pmatrix}$. Il numero di quelli favorevoli è pari al numero delle disposizioni di questo tipo in cui i primi $m$ posti sono "uni". Ma questo è lo stesso che calcolare il numero delle dipsosizioni con ripetizione di 2 oggetti (0 e 1), presi $n + k - m$ volte e dove il primo compare $k$ volte, il secondo $n - m$, cioè $\begin{pmatrix} n+k-m \\ k \end{pmatrix}$. Dunque la probabilità richiesta è: $\frac{(n+k-m)!n!}{(n-m)!(n+k)!}$.
4) La risposta alla prima parte del quesito è 0 se qualche $k_i$ supera il corrispondente $n_i$, altrimenti:

$$\prod_{i=1}^{l} \begin{pmatrix} n_i \\ k_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \\ k_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} n_l \\ k_l \end{pmatrix}.$$

Vediamo la seconda parte: chiamiamo $A_{n_1,\ldots,n_l}$ l'evento per cui il quartiere $i$-esimo ha $n_i$ abitanti per $i \in \{1, \ldots, l\}$ e $B$ l'evento "abbiamo estratto $k_i$ abitanti dall'$i$-esimo quartiere, $i \in \{1, \ldots, l\}$". Quello che conosciamo dalla prima parte è la probabilità condizionata $P[B \mid A_{n_1,\ldots,n_l}]$, ciò che ci si chiede ora è la probabilità condizionata $P[A_{n_1,\ldots,n_l} \mid B]$. Ricordiamo la formula di Bayes:

$$P[A_{n_1,\ldots,n_l} \mid B] = \frac{P[A_{n_1,\ldots,n_l} \cap B]}{P[B]} = \frac{P[B \mid A_{n_1,\ldots,n_l}] \cdot P[A_{n_1,\ldots,n_l}]}{\sum_{\substack{m_1,\ldots,m_l \in \mathbb{N} \\ m_1+\cdots+m_l=n}} P[B \mid A_{m_1,\ldots,m_l}] \cdot P[A_{m_1,\ldots,m_l}]}$$

È chiaro che quello che ci manca è $P[A_{n_1,\ldots,n_l}]$, e o questo dato viene fornito, oppure si possono fare delle congetture. Ad esempio possiamo considerare tutti questi eventi equiprobabili e quindi nella formula si semplificano (tuttavia può essere interessante rispondere alla domanda: "quanti sono gli eventi $A_{n_1,\ldots,n_l}$?", ovvero in quanti modi si possono distribuire $n$ abitanti in $l$ quartieri, sapendo che qualche quartiere può essere disabitato). Oppure si può pensare che la $P[A_{n_1,\dots,n_l}]$ sia proporzionale al coefficiente multinomiale $\binom{n}{n_1\dots n_l}$, e quindi

$$P[A_{n_1,\dots,n_l}] = \frac{\binom{n}{n_1\dots n_l}}{\sum_{\substack{m_1,\dots,m_l\in\mathbb{N}\\ m_1+\dots+m_l=n}} \binom{n}{m_1\dots m_l}} = l^{-n}\binom{n}{n_1\dots n_l}.$$

5) Il numero totale degli eventi è pari al numero delle disposizioni con ripetizione di 6 oggetti presi $6n$ volte, cioè $6^{6n}$. Il numero di quelle in cui ogni faccia compare $n$ volte è pari a $\binom{6n}{n\dots n}$. Dunque la probabilità richiesta è: $\frac{\binom{6n}{n\dots n}}{6^{6n}}$.
6) Il numero totale degli eventi è pari al numero delle ripartizioni di 52 oggetti in 4 sottogruppi di 13 oggetti l'uno, cioè $\binom{52}{13\ 13\ 13\ 13}$. Per calcolare il numero di quelli favorevoli si pensi di distribuire dapprima gli assi: si può fare in 4! modi, in seguito, indipendentemente, ci si trova a distribuire 48 carte ai 4 giocatori, e lo si può fare in $\binom{48}{12\ 12\ 12\ 12}$ modi. Dunque la probabilità richiesta è: $\frac{48!\,4!\,(13!)^4}{52!\,(12!)^4}$.
7) Il numero totale degli eventi è pari al numero delle permutazioni di $n$ oggetti, cioè $n!$. In un solo caso ognuno riprende il proprio soprabito, perciò la prima probabilità richiesta è $\frac{1}{n!}$. Per calcolare la seconda, si utilizzi il principio di inclusione-esclusione, dove $P_i$ sia una proprietà di alcune permutazioni, ovvero quella di attribuire al posto $i$ il numero $i$ (e quindi all'$i$-esima persona il proprio soprabito). In tal caso $N_=(\emptyset)$ rappresenta il numero di permutazioni che non assegnano neppure un soprabito al possessore dello stesso: la probabilità cercata è $\frac{N_=(\emptyset)}{n!}$.
8) Si utilizza il principio di inclusione-esclusione, definendo gli insiemi $A_i$ costituiti dai multipli di $i = 2, 3, 5, 7$. Il numero cercato è $1000 - |\bigcup A_i|$. Ma

$$|\bigcup A_i| = \sum |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - |A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7|$$

e $|A_2| = 500$, $|A_3| = 333$, $|A_5| = 200$, $|A_7| = 142$; $|A_2 \cap A_3| = 166$, $|A_2 \cap A_5| = 100$, $|A_2 \cap A_7| = 71$, $|A_3 \cap A_5| = 66$, $|A_3 \cap A_7| = 47$, $|A_5 \cap A_7| = 28$; $|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = 33$, $|A_2 \cap A_3 \cap A_7| = 23$, $|A_2 \cap A_5 \cap A_7| = 14$, $|A_3 \cap A_5 \cap A_7| = 9$; $|A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7| = 4$. Dunque $|\bigcup A_i| = 758$ e il numero cercato è 256.
9) Supponiamo di numerare i cammelli secondo la posizione occupata nel primo viaggio. Se $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, sia la coppia $i$-esima quella formata dai cammelli $i$ ed $i+1$ e sia $P_i$ la proprietà "la coppia $i$-esima è nello stesso ordine del primo viaggio" ovvero "il cammello $i$-esimo precede di una posizione il cammello $i+1$-esimo". Per poter applicare il principio di inclusione-esclusione è necessario determinare $N_{\geq}(i_1, \dots, i_k)$ al variare della $k$-upla e di $k$ stesso. Diciamo che la coppia $i$-esima e la coppia $j$-esima

sono consecutive se $i = j+1$ oppure $i = j-1$. Fissiamo quindi $k$ e la $k$-upla $(i_1, \ldots, i_k)$; supponiamo che le $k$ coppie si suddividano in $p$ gruppi di cui il primo consti di $r_1$ coppie consecutive, il secondo di $r_2$, il terzo di $r_3$ e così via. Evidentemente $\sum_{i=1}^{p} r_i = k$, inoltre notiamo che un gruppo di $r$ coppie consecutive sarà formato da $r+1$ cammelli. Non potendo alterare l'ordine dei cammelli all'interno di un gruppo, allora ciascun gruppo può essere considerato come un elemento unico. Quindi si tratta di calcolare il numero di possibili permutazioni di $n - \sum_{i=1}^{p}(r_i + 1) + p \equiv n - k$ elementi cioè $N_{\geq}(i_1, \ldots, i_k) = (n-k)!$. Applicando la formula data dal principio di inclusione-esclusione otteniamo:

$$N_{=}(\emptyset) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} (n-k)! = (n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!}(n-k).$$

*Oss.* Si osservi che, essendo $n!$ il numero di possibili permutazioni di $n$ cammelli, la probabilità $p_0$ che nel viaggio di ritorno nessun cammello sia preceduto dallo stesso cammello che lo precedeva all'andata è

$$p_0 = \frac{N_{=}(\emptyset)}{n!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{k!},$$

calcoli di analisi elementare mostrano che questo valore ha limite $1/e$ quando $n$ tende all'infinito (essendo $e$ il numero di Nepero).