Esercitazioni di Statistica Matematica A
Lezioni 4-5

Calcolo combinatorio

1.1) Un treno ha n carrozze, sulla banchina della stazione vi sono r passeggeri ($r \leq n$). Se i passeggeri scelgono a caso ed indipendentemente la carrozza, qual e' la probabilita' che ogni carrozza contenga non piu' di un passeggero? [$n!/(n^r(n-r)!)$]

1.2) In un teatro vi sono $n+k$ sedie; scegliamone m e supponiamo che n spettatori entrino e si sistemino in maniera casuale ed indipendente. Qual e' la probabilita' che le m sedie fissate siano tutte occupate? [$(n+k-m)!n!/((n-m)!(n+k)!)$]

1.3) In un torneo di pallavolo vi sono $2n$ squadre. Per protesta m di esse decidono di non giocare la prima giornata.Si calcoli la probabilita' che k delle n partite in programma non vengano giocate. $\left[\binom{n}{m-k}\binom{n-m+k}{2k-m}2^{2k-m}\Big/\binom{2n}{m}\right]$
Si calcolino i risultati esplicitamente nel caso $n=9$, $m=11$ e $k=6,7,8,9$.
[1008/31824,10080/31824,16128/31824,4608/31824]

Probabilita' condizionate

2.1) In un gioco a premi vi sono n buste ($n \geq 3$) di cui soltanto una contenente un premio (conosciuta dal presentatore). Il concorrente sceglie una busta, quindi il presentatore ne apre k vuote tra quelle rimaste (dove $k \leq n-2$); a questo punto il concorrente puo' scegliere se aprire la busta che ha scelto o cambiarla con una delle altre (ancora chiuse). Cosa gli conviene fare? [cambiare]

Variabili aleatorie discrete

3.1) Un'automobile può essere venduta con una serie di optionals. La funzione di massa f del numero di optionals scelti dal cliente è data da:

x	7	8	9	10	11	12	13
$f(x)$	0.040	0.130	0.190	0.300	0.240	0.050	0.050.

1) Determinare la probabilità che un cliente scelga meno di 9 optionals. [0.17]
2) Determinare la probabilità che un cliente scelga più di 11 optionals. [0.11]
3) Determinare la probabilità che un cliente scelga un numero di optionals compreso tra 8 e 12 (estremi inclusi). [0.91]
4) Determinare la funzione di ripartizione di X.
5) Calcolare il valore atteso degli optionals scelti [9.92] e la varianza. [1.9536].

3.2 Consideriamo le seguenti funzioni F e G:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \le x < 1 \\ \frac{3}{4}, & 1 \le x < 4 \\ 1, & x \ge 4 \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \le x \le 1 \\ \frac{3}{4}, & 1 < x < 4 \\ 1, & x \ge 4 \end{cases}$$

1) Quale delle due è una funzione di ripartizione? [F]
2) Risalire a X.
3) Calcolare il valore atteso di X. [5/4]

3.3 Determinare la costante $c \in \mathbb{R}$ tale per cui la seguente funzione è una funzione di massa:

$$f(x) = cx, \qquad \text{per } x = 1, 2, 3, 4.$$

[1/10]

Variabili aleatorie Binomiali

4.1) Assumendo che la probabilita' che nasca un maschio sia 1/2, trovate la probabilita' che in una famiglia con 4 figli ci sia
1) almeno un maschio; [15/16]
2) almeno un maschio e una femmina. [7/8]
3) Consideriamo ora 4000 famiglie con 4 figli. Quante ci si aspetterebbe che abbiano almeno un maschio e una femmina? [3500]

4.2) Se il 20% dei bulloni prodotti da una certa macchina e' difettoso, determinate la probabilita' che, su 4 bulloni scelti a caso
1) uno sia difettoso; [0.8^4]
2) zero siano difettosi; [0.8^4]
3) al massimo 2 siano difettosi. [608/625]
4) Trovare la media e lo scarto quadratico medio della distribuzione dei bulloni difettosi su un totale di 400 bulloni. [80; 8]

4.3) Durante un esame a risposta multipla con 5 domande e 3 possibili risposte per ogni domanda.
1) Quale e' la probabilita' che uno studente azzecchi almeno 4 risposte semplicemente rispondendo a caso? [11/243]
2) Quale e' il numero medio di risposte azzeccate? [5/3]

4.4) La probabilita' di laurearsi di uno studente che entra nell'Universita' e' 0.4. Determinate la probabilita' che, su 5 studenti

1) nessuno riesca a laurearsi; [0.6^5]
2) uno riesca a laurearsi; [$2 \cdot 0.6^4$]
3) almeno uno riesca a laurearsi. [$1 - 0.6^5$]

4.5) Un passeggero qualsiasi ha una probabilita' p di non presentarsi all'imbarco, pertanto una compagnia aerea accetta N prenotazioni per un aereo con capienza n ($n \leq N$). Qual e' la probabilita' che almeno un passeggero con regolare prenotazione resti a terra? Supponendo che $p = 1/10$, tale evento e' piu' probabile nel caso $N = 22$, $n = 20$ oppure $N = 11$, $n = 10$? [$N = 11$, $n = 10$]

4.6) Un processo di lavorazione fabbrica fusibili che dovrebbero avere una percentuale di pezzi difettosi non superiore a 1%. Il controllo si fa provando 10 fusibili a caso tra quelli prodotti e se anche solo uno di essi risulta difettoso, si ferma la produzione e si procede alla verifica dell'impianto.

1) Se la probabilita' di produrre un pezzo difettoso fosse esattamente 0.01, quale sarebbe la probabilita' di fermare l'impianto dopo un controllo? 0.99^{10}]
2) Quanti fusibili devono essere controllati affinché la probabilita' di fermare l'impianto sia pari a 0.95 nell'ipotesi che la percentuale di pezzi difettosi sia 10%? [almeno 29]

4.7) Un computer monta un masterizzatore A e un lettore cd-rom B di marche differenti. Il masterizzatore sbaglia a scrivere un bit con probabilita' p; in lettura entrambi hanno probabilita' p_0 di sbagliare un bit se il cd e' stato scritto da un masterizzatore della stessa marca, mentre sbagliano con probabilita' p_1 ($p_1 \geq p_0$) se il disco e' stato scritto da un masterizzatore di marca differente. Se l'input e' un programma di k bit, si calcoli:

1) la probabilita' di r errori in scrittura; [$\binom{k}{r} p^r (1-p)^{k-r}$]
2) la probabilita' che l'input e l'output coincidano in caso di rilettura con B; [$(1 - p - p_1 + 2pp_1)^k$]
3) la media degli errori in scrittura e in scrittura+lettura con A. [kp, $k(p + p_0 - 2pp_0)$]
4) Quando conviene utilizzare A per leggere il cd e quando conviene invece utilizzare B? [conviene A se e solo se $p \leq 1/2$]

4.8) Trovate la probabilita' che in 5 lanci di un dado non truccato il 3 si presenti

1) mai; [$(5/6)^5$]
2) almeno una volta; [$1 - (5/6)^5$]
3) quattro volte. [$25/6^4$]

Variabili aleatorie Poissoniane

5.1) Tra le 2 e le 4 del pomeriggio, in media, al minuto, il numero di chiamate telefoniche che arrivano ad un certo centralino e' 2.5. Trovate la probabilita' che, in un minuto, ci siano

1) zero; [0.0821]
2) due; [0.2565]
3) quattro o meno; [0.8912]
4) piu' di sei chiamate telefoniche; [0.0142]

5.2) Un certo tipo di foglio metallico, in media, ha 5 difetti per 10 mq. Se assumiamo una distribuzione di Poisson, qual'e' la probabilita' che un foglio di 15 mq avra' almeno 3 difetti? [0.9797]

5.3) In un lungo manoscritto, si e' scoperto che solo il 13.5% delle pagine contengono errori tipografici. Se assumiamo che il numero di errori per pagina e' una variabile aleatoria con una distribuzione di Poisson, trovate la % media di pagine che hanno esattamente 1 errore. [12.5%]

5.4) Una sostanza radioattiva emette particelle secondo un processo di Poisson. Se la probabilita' di non emissione in un intervallo di 1 secondo e' pari a 0.165, trovare
1) il numero atteso di emissioni per secondo; [1.8018]
2) la probabilita' di non emissione in un intervallo di 2 secondi; [0.027225]
3) la probabilita' di non piu' di 2 emissioni in un intervallo di 4 secondi; [0.02533]
4) la probabilita' di non piu' di 2 emissioni in un intervallo di 4 secondi dato che si e' avuta almeno un'emissione. [0.0246]

5.5 In una banca vi sono 10 sportelli; siano $X_1, \ldots, X_n$ il numero di persone presenti agli sportelli e si supponga che siano variabili aleatorie indipendenti con distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = 2$. Calcolare:
1) la probabilità che vi sia almeno una persona in banca; [≈ 1]
2) il valor medio del numero di persone presenti in banca; [20]
3) la probabilità che vi siano almeno 3 clienti al primo spotello sapendo che in ciascuno degli altri ve ne sono meno di 2; [0.3233]
4) la probabilità che almeno uno sportello sia libero. [0.7664]

Alcune soluzioni

1.1) Il numero totale degli eventi è pari al numero delle disposizioni con ripetizione che si ottengono con n oggetti presi r volte, cioè n^r, il numero di quelli favorevoli è pari al numero delle disposizioni semplici, cioè $\frac{n!}{(n-r)!}$. Dunque la probabilità richiesta è: $\frac{n!}{n^r(n-r)!}$. (Notare che le combinazioni non sono equiprobabili, per convincersene provare il caso $n = 3$ e $r = 2$, con la convenzione che la coppia (i, j) indichi che il primo passeggero sceglie la carrozza i e il secondo la j).

1.2) Una delle possibili soluzioni è schematizzabile nel modo seguente: si supponga di avere $n + k$ caselle che rappresentino i posti del teatro, in cui le prime m siano quelle fissate (questa ipotesi non lede la generalità) e si riempiano n di queste caselle con un 1, a indicare che il posto rappresentato da quella casella è stato occupato da una persona, le altre k si riempiano con uno 0. Il numero totale degli eventi è pari al numero delle disposizioni con ripetizione di 2 oggetti (0 e 1), presi $n+k$ volte e dove il primo compare k volte, il secondo n, cioè $\binom{n+k}{k}$. Il numero di quelli favorevoli è pari al numero delle disposizioni di questo tipo in cui i primi m posti sono "uni". Ma questo è lo stesso che calcolare il numero delle dipsosizioni con ripetizione di 2 oggetti (0 e 1), presi $n+k-m$ volte e dove il primo compare k volte, il secondo $n-m$, cioè $\binom{n+k-m}{k}$. Dunque la probabilità richiesta è: $\frac{(n+k-m)!n!}{(n-m)!(n+k)!}$.

1.3) Iniziamo col determinare in quanti modi possibili si possono scegliere le m squadre che protestano su un totale di $2n$ squadre. Questo equivale a determinare quanti possibili differenti sottoinsiemi di cardinalità m esistono in un insieme di cardinalità $2n$: $\binom{2n}{m}$. Questo rappresenta il numero totale di casi. Calcoliamo ora i casi favorevoli.
Se k partite non vengono giocate, significa che in $m-k$ partite entrambe le squadre protestano mentre in $2k-m$ partite solo una squadra protesta (pertanto $m/2 \leq k \leq \min(m,n)$ altrimenti la probabilità cercata è sicuramente 0).
Il numero di scelte differenti delle $m-k$ partite in cui entrambe le squadre protestano (su un totale di n partite) è $\binom{n}{m-k}$; per ogni scelta fissata, mi rimangono da scegliere $2k-m$ squadre che protestano nelle rimanenti $n-m+k$ partite (senza che due squdre differenti giochino nella stessa partita. Questo si può fare scegliendo prima le partite in cui giocano (cioè $\binom{n-m+k}{2k-m}$) e per ciascuna scelta delle partite abbiamo due possibilità di scelta della squadra che protesta (cioè un totale di 2^{2k-m}). In totale i casi favorevoli sono

$$\binom{n}{m-k}\binom{n-m+k}{2k-m}2^{2k-m},$$

pertanto la probabilità cercata è

$$\mathbb{P}(l \text{ partite non vengono giocate}) = \frac{\binom{n}{m-k}\binom{n-m+k}{2k-m}}{\binom{2n}{m}}2^{2k-m}.$$

3.1)

1) $\mathbb{P}(X < 9) = 0.040 + 0.0130 = 0.170.$
2) $\mathbb{P}(X > 11) = 0.050 + 0.050 = 0.1.$
3) $\mathbb{P}(8 \leq X \leq 12) = 0.130 + 0.190 + 0.300 + 0.240 + 0.050 + = 0.910.$

4)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 7 \\ 0.040, & 7 \leq x < 8 \\ 0.170, & 8 \leq x < 9 \\ 0.360, & 9 \leq x < 10 \\ 0.660, & 10 \leq x < 11 \\ 0.900, & 11 \leq x < 12 \\ 0.950, & 12 \leq x < 13 \\ 1 & x \geq 13. \end{cases}$$

5) $E[X] = \sum_{i=7}^{13} i\mathbb{P}(X = i) = 9.92$, $\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=7}^{13}(i - E[X])^2 \equiv \sum_{i=7}^{13} i^2 - E[X]^2 = 1.9536$.

3.2)

1) F è una funzione di ripartizione, mentre G no in quanto non è continua da destra in $x = 1$.
2) X assume (con probabilità positiva) i valori 0,1,4.
3) $E[X] = \frac{5}{4}$.

3.3) c deve esser positiva, inoltre deve soddisfare $1 = c + 2c + 3c + 4c$, quindi per $c = \frac{1}{10}$ la funzione f è di massa.

4.1) Sia X la variabile aleatoria che indica il numero di figli maschi nella famiglia con 4 figli. La v.a. X ha una distribuzione binomiale con parametri n = 4 e p = 1/2.

1) $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - \binom{4}{0}(1/2)^0(1 - 1/2)^4 = 15/16 = 0.9375$.
2) $\mathbb{P}(\text{almeno un maschio e una femmina}) = 1 - \mathbb{P}(\text{nessun maschio}) - \mathbb{P}(\text{nessuna femmina})$ $= 1 - (1/2)^4 - (1/2)^4 = 7/8$.
3) Sia Z la variabile aleatoria che indica il numero di famiglie con almeno un maschio e una femmina fra le 4000 considerate. La probabilita' di successo p, come ottenuto nel punto precedente e' pari a 7/8. La v.a. Z ha una distribuzione binomiale con parametri n = 4000 e p = 7/8. Percio' il numero atteso di famiglie con almeno 1 maschio e una femmina e' data da:

$$E(Z) = np = 4000(7/8) = 3500$$

.

4.2) Sia X la v.a. che indica il numero di bulloni difettosi fra i 4 considerati ed ha una distribuzione binomiale con parametri n = 4 e p = 0.2.

1) $\mathbb{P}(X = 1) = \binom{4}{1}(0.2)^1(1 - 0.2)^3 = 0.4096$.
2) $\mathbb{P}(X = 0) = \binom{4}{0}(0.2)^0(1 - 0.2)^4 = 0.4096$.

3) $\mathbb{P}(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0.4096 + 0.4096 + \binom{4}{2}(0.2)^2(1 - 0.2)^2 = 0.4096 + 0.4096 + 0.1536 = 0.9728$.

4) Sia Z la v.a. che indica il numero di bulloni difettosi su un totale di 400, e quindi Z ha una distribuzione binomiale di parametri n = 400 e p = 0.2. Percio' abbiamo che la media e' pari a $E(Z) = np = 400(0.2) = 80$ e lo scarto quadratico medio e' dato da $\sigma(Z) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{400(0.2)(0.8)} = 8$.

4.3) Sia X la v.a. che indica il numero di risposte azzeccate fra le 5 domande dell'esame, e quindi X ha una distribuzione binomiale di parametri n = 5 e p = 1/3.

1) $\mathbb{P}(X \geq 4) = \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 5) = 0.04527$.
2) Il numero medio di risposte azzeccate e' dato da $E(X) = np = 5(1/3) = 5/3$.

4.3) Sia X la v.a. che indica il numero di studenti che riescono a laurearsi su 5 studenti. La v.a. X ha una distribuzione binomiale con parametri n = 5 e p = 0.4.

1) $\mathbb{P}(X = 0) = (0.6)^5 = 0.07776$.
2) $\mathbb{P}(X = 1) = 5(0.4)(0.6)^4 = 0.2592$.
3) $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 0.92224$.

4.8) Sia X la variabile aleatoria che indica il numero di volte che si presenta 3. La probabilita' di successo in questo esperimento binomiale (cioe' la probabilita' che si presenti 3) e' pari a 1/6 e consideriamo 5 ripetizioni dell'esperimento (cioe' il dado viene lanciato 5 volte). Quindi X ha una distribuzione binomiale con parametri n = 5 e p = 1/6.

1) $\mathbb{P}(X = 0) = \binom{5}{0}(1/6)^0(1 - 1/6)^5 = (5/6)^5 = 0.4019$.
2) $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.4019 = 0.5981$.
3) $\mathbb{P}(X = 4) = \binom{5}{4}(1/6)^4(1 - 1/6)^1 = \frac{25}{6}(1/6)^4 = 0.0032$.

5.1) Sia X la v.a. che indica il numero di chiamate telefoniche che arrivano al centralino al minuto. La v.a. X ha una distribuzione di Poisson con parametro $\lambda = 2.5$.

1) $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{e^{-2.5} 2.5^0}{0!} = e^{-2.5} = 0.08208$.
2) $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{e^{-2.5} 2.5^2}{2!} = 0.2565$.
3) $\mathbb{P}(X \leq 4) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 4) = 0.08208 + 0.2565 + \frac{e^{-2.5} 2.5^3}{3!} + \frac{e^{-2.5} 2.5^4}{4!} = 0.8911$.
4) $\mathbb{P}(X \geq 6) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 6) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 4) - \mathbb{P}(X = 5) - \mathbb{P}(X = 6) = 1 - 0.8911 - \frac{e^{-2.5} 2.5^5}{5!} - \frac{e^{-2.5} 2.5^6}{6!} = 0.0142$.

5.2) Sia X_a la v.a. che indica il numero di difetti in un foglio di a mq di metallo. La v.a. X ha una distribuzione di Poisson con parametro $a\lambda_0$ che possiamo stimare sapendo che il valore medio di X_{10} è 5 (quindi $\lambda_0 = 0.5$). Pertanto X_{15} ha una distribuzione di Poisson con parametro $\alpha = 15(0.5) = 7.5$. Percio' abbiamo

$$\mathbb{P}(X_{15} \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(X_{15} < 3) = 1 - \mathbb{P}(X_{15} = 0) - \mathbb{P}(X_{15} = 1) - \mathbb{P}(X_{15} = 2) = 0.9797.$$

5.3) Sia X la v.a. che indica il numero di errori per pagina. La v.a. X ha una distribuzione di Poisson, con parametro che possiamo calcolare usando il fatto che $P(X = 0) = 1 - 0.135 = 0.865 = e^{-\lambda}$, percio' $\lambda = 0.145$. Pertanto

$$P(X = 1) = \frac{e^{-0.145} 0.145^1}{1!} = 0.125.$$

5.4) Sia X_t la v.a. che indica il numero di particelle emesse in t secondi. La v.a. X_t ha una distribuzione di Poisson con parametro $t\lambda_0$ che possiamo calcolare usando il fatto che $\mathbb{P}(X_1 = 0) = 0.165 = e^{-\lambda_0}$, percio' $\lambda_0 = 1.8018$.

1) Il numero atteso e' dato dal valore del parametro percio' e' 1.8018.
2) Siccome vogliamo considera un intervallo di 2 secondi, X_2 ha una distribuzione di Poisson con parametro $1.8018 \times 2 = 3.6036$, quindi $\mathbb{P}(X_2 = 0) = e^{-3.6036} = 0.0273$.
3) Consideriamo un intervallo di 4 secondi e quindi X_4 che ha una distribuzione di Poisson con parametro $1.8018 \times 4 = 7.2072$, quindi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_4 \leq 2) &= \mathbb{P}(X_4 = 0) + \mathbb{P}(X_4 = 1) + \mathbb{P}(X_4 = 2)\\ &= e^{-7.2072} + 7.2072e^{-7.2072} + \frac{e^{-7.2072} 7.2072^2}{2}\\ &= 0.0253.\end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_4 \leq 2 | X_4 \geq 1) &= \frac{\mathbb{P}(1 \leq X_4 \leq 2)}{\mathbb{P}(X_4 \geq 1)}\\ &= \frac{7.2072e^{-7.2072} + e^{-7.2072} 7.2072^2/2!}{1 - e^{-7.2072}} = 0.0246.\end{aligned}$$

5.5) Si potrebbe mostrare che la somma di variabili di Poisson indipendenti è ancora una variabile di Poisson di parametro pari alla somma dei parametri delle singole variabili. Risolviamo invece l'esercizio senza tener conto di questa osservazione.

1)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\exists i \in \{1, \dots, 10\} : X_i > 0) &= 1 - \mathbb{P}(X_i = 0, \forall i = 1, \dots, 10)\\ &= 1 - \prod_{i=1}^{10} \mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - \exp(-10 \cdot 2) \approx 1.\end{aligned}$$

2)

$$E\left[\sum_{i=1}^{10} X_i\right] = \sum_{i=1}^{10} E[X_i] = 10 \cdot 2 = 20.$$

3)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 \geq 3 | X_i \leq 2, \forall i = 2, \dots, 10) &= \mathbb{P}(X_1 \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(X_1 \leq 2)\\ &= 1 - (1 + 2 + 4/2!) \exp(-2) \approx 0.3233.\end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\exists i \in \{1,\dots,10\} : X_i = 0) &= 1 - \mathbb{P}(X_i > 0, \forall i = 1,\dots,10)\\ &= 1 - \prod_{i=1}^{10} \mathbb{P}(X_i > 0) = 1 - (1 - \exp(-2))^{10} \approx 0.7664.\end{aligned}$$