Esercitazioni di Statistica Matematica A
Lezione 7

Variabili aleatorie continue

1.1) Determinare la costante $k \in \mathbb{R}$ tale per cui le seguenti funzioni siano funzioni di densità. Determinare poi la media e la varianza di X.
a) $f(x) = kx^2$, per $0 < x < 4$
b) $f(x) = k(1 + 2x)$, per $0 < x < 2$
c) $f(x) = ke^{-x}$, per $x > 0$.

1.2) Sia X una variabile aleatoria con funzione di ripartizione:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{50}x^2, & \text{se } 0 \le x < 5 \\ -\frac{1}{50}x^2 + \frac{2}{5}x - 1, & \text{se } 5 \le x < 10 \\ 1, & \text{se } x \ge 10 \end{cases}$$

a) Disegnare F. Quali valori può assumere la variabile aleatoria (continua) X?
b) Mostrare che X ha densità e calcolarla.
c) Calcolare il valore atteso di X.

1.3) Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^2}, & \text{se } x > 1 \\ 0, & \text{se } x \le 1 \end{cases}$$

a) Determinare $c \in \mathbb{R}$ tale che f sia una funzione di densità.
b) Esistono il valore atteso e la varianza di X? Se sì, calcolarli.

1.4) Sia

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2, \qquad -1 < x < 1.$$

Determinare:
1) $P(X > 0)$
2) $P\left(X > \frac{1}{2}\right)$
3) $P\left(-\frac{1}{2} \le X \le \frac{1}{2}\right)$
4) $P(X < -2)$
5) $P\left(X < 0 \text{ oppure } X > -\frac{1}{2}\right)$
6) il valore $y \in \mathbb{R}$ tale che $P(X > y) = 0.05$

1.5) Sia X con distribuzione avente densità

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1 + x^2} \qquad \text{(Cauchy)}.$$

Calcolare $\mathbb{P}(X \geq 1)$ e $\mathbb{P}(|X| \geq 1)$.

Variabili con distribuzione gaussiana

2.1) Una bilancia difettosa ha un errore sistematico di 0.1g ed un errore casuale che si suppone avere la distribuzione $\mathcal{N}(0, 4/25)$ (si osservi che si possono avere anche risultati negativi!). Si sottopone alla misura un campione di 0.9g. Stimare:
a) la probabilità che la misura dia un risultato compreso tra 0.8g e 1g;
b) la probabilità che la misura dia un risultato superiore a 1g;
c) la probabilità che il valore assoluto della misura sia minore di 0.9g.

2.2) L'altezza di una data popolazione maschile di età compresa tra i 18 ed i 25 anni segue una distribuzione normale.
a) Se l'altezza media fosse 165cm ed esattamente il 5.48% della popolazione fosse più basso di 158cm, quale percentuale della popolazione avrebbe un'altezza superiore a 174cm?
b) Se il primo quartile dell'altezza fosse 160cm ed il 90^o percentile fosse 184cm, quanto varrebbero la media e la deviazione standard?

2.3) Il tempo necessario a Gianni per coprire il percorso casa-ufficio è una variabile aleatoria di legge normale. Se il tempo medio è di 30 minuti e la probabilità di coprire il percorso in più di 40 minuti è 0.1, quanto vale la probabilità di coprire il percorso in più di 50 minuti?

2.4) La durata in ore di una lampadina segue una legge normale di media 2000 e varianza σ^2. Se un compratore richiede che almeno il 90% di esse abbia una durata superiore alle 1500 ore, qual'è il valore massimo che σ può assumere per soddisfare l'esigenza dell'acquirente?

2.5) Una fabbrica che fornisce le FS costruisce rotaie la cui lunghezza segue una legge normale $\mathcal{N}(9.99, 1/10000)$ (dove la media è in metri e la varianza in metri^2). Determinare:
a) la probabilità che una rotaia sia più lunga di 10m;
b) la probabilità che 100 rotaie siano più lunghe di 1Km;
c) la probabilità che 101 rotaie siano più lunghe di 1Km;
d) la probabilità che esattamente 101 rotaie siano necessarie per coprire 1km;
e) la lunghezza x affinché la percentuale di rotaie con lunghezza non superiore a x sia il 10%;
f) Come si deve modificare la lunghezza media affinché la percentuale di rotaie con lunghezza superiore a 10m sia il 40%.

2.6) Un operatore, in attesa dell'apertura del mercato azionario, decide di comperare un pacchetto di azioni se la differenza tra il prezzo all'apertura e quello alla chiusura della sera precedente sarà compreso tra a e b ($a < b \in \mathbb{R}$). Supponendo che la variazione di prezzo segua una legge normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, qual'è il valore di σ in corrispondenza al quale si ha la massima probabilità di comperare?

SOLUZIONI

1.1)

1) $1 = \int_0^4 kx^2dx = k\frac{64}{3}$ allora $k = \frac{3}{64}$. Inoltre $E[X] = (3/64)\int_0^4 x^3dx = 3$ mentre $\mathrm{Var}(X) = (3/64)\int_0^4 x^4 - 9 = 3/5$.
2) $1 = k\int_0^2 (1+2x)\, dx = 6k$ allora $k = \frac{1}{6}$. Inoltre $E[X] = \int_0^2 (x+2x^2)\mathrm{d}x = 11/9$ e $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{6}\int_0^2 \left(x^2+2x^3\right)\mathrm{d}x - (11/9)^2 = 23/81$.
3) Provare per induzione che

$$\int_0^{+\infty} x^n \exp(-\lambda x)\mathrm{d}x = \frac{n!}{\lambda^n}$$

da cui $E[X] = 1/\lambda$ e $\mathrm{Var}(X) = 1/\lambda^2$.

1.2)

a) I valori assunti dalla v.a. X (il cui insieme prende il nome di *range essenziale* della variabile X) sono

$$\mathrm{essRg}(X) = \{y : \forall V \text{ intorno di } y, \mathbb{P}(V) > 0\} \equiv \cup_{x\in\mathbb{R}} \widehat{F_X^{-1}(x)}^{o}$$

(dove $\widehat{A}^o$ è l'interno topologico di A). In definitiva si trova l'intervallo $[0, 10]$.

b) F è derivabile con continuità e la funzione di densità $f = F'$ di X risulta essere:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{25}x, & 0 < x < 5 \\ -\frac{1}{25}x + \frac{2}{5}, & 5 \le x < 10 \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases}$$

c) $E[X] = \int_{\mathbb{R}} xf(x)\, dx = \int_0^5 \frac{1}{25}x^2dx + \int_5^{10}\left(-\frac{1}{25}x^2 + \frac{2}{5}x\right) dx = 5$

1.3)

a) $f \ge 0$ e $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{c}{x^2}dx = \left(-\frac{c}{x}\right)\Big|_1^{+\infty} = c$. Di conseguenza, è necessario e sufficiente che $c = 1$.
b) Il valore atteso non è finito.

1.2)

a) $P(X > 0) = \int_0^1 f(x)\, dx = \left(\frac{x^3}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$
b) $P\left(X > \frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\, dx = \left(\frac{x^3}{2}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{7}{16}$
c) $P\left(-\frac{1}{2} \le X \le \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$
d) $P(X < -2) = 0$
e) $P\left(X < 0 \text{ oppure } X > -\frac{1}{2}\right) = P(X < 0) + P\left(X > -\frac{1}{2}\right) - P\left(-\frac{1}{2} < X < 0\right) =$
$= \frac{1}{2} + \frac{9}{16} - \frac{1}{16} = 1$

f) Si noti che $F_X|_{(-1,1)}$ è invertibile su $(0,1)$ con l'inversa $q(\alpha) =^3 \sqrt{2\alpha - 1}$. Si ottiene $q(0.05) = 0.965$

1.5)

a)
$$\mathbb{P}(X \geq 1) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\pi(1+x^2)} \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \arctan(x)\Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{4}.$$

b) Poichè la funzione densità è pari si ha che $\mathbb{P}(|X| \geq 1) = 2\mathbb{P}(X \geq 1) = 1/2$.

2.1)

a) Essendo $X \sim \mathcal{N}(0, 4/25)$ allora $5X/2 \sim \mathcal{N}(0,1)$; inoltre $M = X + 1 \in [4/5, 1]$ se e solo se $X \in [-1/5, 0]$, pertanto $\mathbb{P}(X \in [-1/5, 0]) = \mathbb{P}(5X/2 \in [-1/2, 0]) = \phi(1/2) - 1/2 \approx 0.1915$ (si ricordi che $\phi(x) + \phi(-x) = 1$).

b) $X + 1 \leq 1$ se e solo se $X \leq 0$ quindi $\mathbb{P}(X \leq 0) = 1/2$.

c) $|X+1| \leq 9/10$ se e solo se $X \in [-19/10, -1/10]$, pertanto $\mathbb{P}(X \in [-19/10, -1/10]) = \mathbb{P}(5X/2 \in [-19/4, -1/4]) = \phi(19/4) - \phi(1/4) \approx 1 - 0.5987 = 0.4013$.

2.2) Ricordiamo che $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ implica $(X-\mu)/\sigma \sim \mathcal{N}(0,1)$ e che, se U_X è la funzione dei quantili di X allora $U_X = \mu + \sigma q$ (dove q è la funzione dei quantili della distribuzione $\mathcal{N}(0,1)$. Si ricordi inoltre che $q(\alpha) = -q(1-\alpha)$.

a) Sappiamo che $\mu = 165$ e che $0.0548 = \mathbb{P}(X \leq 158) = \phi((158-\mu)/\sigma)) = \phi(-7/\sigma)$, pertanto $\sigma = -7/q(0.0548) = 7/q(0.9452) \approx 7/1.6 = 4.375$. Da cui $\mathbb{P}(X > 174) = 1 - \phi((174-\mu)/\sigma) = 1 - \phi(2.0571) = 1 - 0.9802 = 0.0198$.

b) Se $160 = U_X(1/4) = \mu + \sigma q(1/4)$, $184 = U_X(9/10) = \mu + \sigma q(9/10)$ allora $\sigma = (184 - 160)/(q(9/10) - q(1/4)) \approx 24/(1.2816 - 0.6745) = 12.2693$, mentre $\mu = (160q(9/10) - 184q(1/4))/(q(9/10) - q(1/4)) \approx 329.1544/1.956 = 168.2758$.

2.3) $1/10 = \mathbb{P}(X > 40) = 1 - \phi((40-30)/\sigma)$ pertanto $\sigma = 10/q(9/10) \approx 10/1.2816 = 7.8027$. Da cui $P(X > 50) \approx 1 - \phi(20/7.8027) = 1 - \phi(2.5632) = 1 - 0.9948 = 0.0052$.

2.4) Se X è la durata della lampadina, l'aquirente richiede $9/10 \leq \mathbb{P}(X \geq 1500) = \mathbb{P}((X-\mu)/\sigma \geq (1500-\mu)\sigma) = 1 - \phi(-500/\sigma)$. Pertanto si ottiene $\sigma \leq -500/q(1/10) = 500/q(9/10) \approx 500/1.2816 \approx 390.137$.

2.5) Sia X la misura di una rotaia.

a) $\mathbb{P}(X > 10) = 1 - \phi((10 - 9.99)/0.01) = 1 - \phi(1) \approx 1 - 0.8143 = 0.1857$.

b) Se $\{X_i\}_{i=1}^{100}$ sono le misure (indipendenti ed identicamente distribuite) delle 100 rotaie, allora $\sum_{i=1}^{100} X_i \sim \mathcal{N}(100 \cdot 9.99, 100 \cdot (1/10000))$, pertanto $\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{100} X_i > 1000) = 1 - \phi(1/0.1) = 1 - \phi(10) \approx 0$.

c) Similmente $\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{101} X_i > 1000) = 1 - \phi((1000 - 9.99 \cdot 101)/\sqrt(0.0101)) = 1 - \phi(-89.9/\sqrt(1.01)) \approx 1$.

d) Sebbene un calcolo esatto di questo tipo coinvolgerebbe una convoluzione, in questo specifico caso possiamo stimare la probabilità in questo modo: sia A:"le prime 100 rotaie non bastano a coprire 1Km" e B:"le 101 rotaie bastano a coprire 1Km". Quello che dobbiamo calcolare è $\mathbb{P}(A \cap B)$ cioè $P(A) - P(A \cap B^c) \geq P(A) - P(B^c) \approx 1$. (Si osservi che, essendo variabili normali, le lunghezze non sono necessariamente positive e quindi $B^c \not\subset A$, anche se nel nostro caso la probabilità dell'evento $B^c \cap A^c$ è prossima a 0).

e) $x = U_X(0.1) = \mu + \sigma q(0.1) = 9.99 - 0.01q(0.9) \approx 9.99 - 0.01 \cdot 1.2816 = 9.9772$.

f) Se $4/10 = \mathbb{P}(Y\sigma + \mu > 10)$ (dove $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ e $\sigma = 0.01$) allora, equivalentemente, $(10 - \mu)/\sigma = q(6/10)$ cioè $\mu = 10 - 0.01q(6/10) \approx 10 - 0.002533 = 9.997467$.

2.6) Sia X la differenza di quotazione, $\mathbb{P}(X \in [a,b]) = f(\sigma)$, dove, dopo un cambio di variabile

$$f(\sigma) = \int_{a/\sigma}^{b/\sigma} \frac{\exp(-s^2/2)}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{d}s.$$

Calcolando la derivata f' e studiando la funzione in $(0, +\infty)$ si trova immediatamente che:

a) se $a \leq 0 \leq b$ $(a < b)$ allora f è decrescente, pertanto minore è σ, maggiore è la probabilità che $X \in [a,b]$ (ed il limite per σ che tende a 0^+ di tale valore è 1);

b) se $0 < a < b$ allora si trova che f è decrescente in $(\sqrt{(b^2 - a^2)/(2\ln(b/a))}, +\infty)$ e crescente in $(0, \sqrt{(b^2 - a^2)/(2\ln(b/a))})$, pertanto il massimo è assunto in $\sigma^2 = (b^2 - a^2)/(2\ln(b/a))$.

c) se $a < b < 0$, utilizzando la parità ed il punto precedente si ha che il massimo è assunto in $\sigma^2 = (a^2 - b^2)/(2\ln(a/b))$.