1 Esercitazione 1: / /

1.1 Operazioni su eventi

Esercizio 1 *Un dado viene lanciato due volte. Adalberto vince se al primo lancio esce un numero pari mentre Bertolasio vince se al secondo lancio esce un numero non superiore a 3.*

1. *Determinare il più piccolo spazio campionario che descriva tutti i possibili esiti dell' esperimento.*
2. *Descrivere in termini dei sottoinsiemi dello spazio campionario i seguenti eventi:*
   (a) *Adalberto vince*
   (b) *Bertolasio vince*
   (c) *Adalberto non vince*
   (d) *Bertolasio non vince*
   (e) *Adalberto e Bertolasio vincono entrambi*
   (f) *Vince Adalberto ma non Bertolasio*
   (g) *Vince Bertolasio ma non Adalberto*
   (h) *Nessuno dei due vince*
   (i) *Almeno uno dei due vince*
   (j) *Almeno uno dei due non vince*
   (k) *Esattamente uno dei due vince*
   (l) *Il prodotto dei due lanci è multiplo di 6*
   (m) *Vincono entrambi ed il prodotto dei due lanci è multiplo di 24*
   (n) *Almeno uno dei due vince oppure la somma dei due dadi è maggiore o uguale a 4.*

Esercizio 2 *Sia* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *uno spazio di probabilità ed* A, B *e* C *tre eventi contenuti in* $\mathbb{F}$. *Si traducano in notazione insiemistica i seguenti eventi:*

1. *almeno un evento si verifica*
2. *al più un evento si verifica*
3. *nessun evento si verifica*

4. *tutti gli eventi si verificano*
5. *si verifica esattamente un evento*
6. *due eventi su tre si verificano*

Esercizio 3 * *Sia* $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=1}^n$ *una collezione finita di sottoinsiemi in* Ω *tali che* $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$*. Allora la* σ*-algebra generata da* $\mathcal{A}$ $\sigma(\mathcal{A})$ *è*

$$\mathcal{F} = \{\bigcup_{j=1}^{m} f(x(j)) : m \in \mathbb{N}^*, x(j) \in \{0,1\}^n\} \cup \{\emptyset\}$$

dove

$$f(x) := \bigcap_{i=1}^{n} B_{x,i}, \qquad \forall x \in 0, 1^n,$$

$$B_{x,i} := \begin{cases} A_i & \textit{se i=1} \\ A_i^c & \textit{se i=0} \end{cases} \qquad \forall x \in \{0,1\}^n.$$

Mostrare in particolare che $\mathcal{A} \setminus \{\emptyset\}$*, dove*

$$\mathcal{A} := \{A \subseteq \Omega : \exists x \in \{0,1\}^n : A = f(x)\},$$

è una partizione di Ω *(i.e.* $\emptyset \notin \mathcal{A}$*, per ogni* $A, B \in \mathcal{A}$ *tale che* $A \neq B$ *implica* $A \cap B = \emptyset$ *ed infine* $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \Omega$*).*

Esercizio 4 *Consideriamo il seguente esperimento: lancio una moneta ed osservo quale faccia è comparsa. Se è comparsa "testa" lancio un dado ed osservo il numero sulla faccia superiore. Se è uscita croce lancio di nuovo la moneta ed osservo quale faccia è comparsa.*

1. *Trovare uno spazio campionario* Ω *che permetta di descrivere tutti gli esiti.*
2. *Descrivere l'insieme delle parti di* Ω *in termini degli eventi elementari.*
3. *Quali sono gli eventi che descrivono i possibili risultati del primo lancio ?*
4. *Qual è la più piccola* σ*-algebra che contiene gli eventi determinati al punto 3?*
5. *Supponendo gli eventi indipendenti si individui la misura di probabilità sullo spazio trovato.*

Esercizio 5 *Sia* $\mathbb{R}$ *la retta reale, mostrare che l' insieme* $\mathcal{A}$ *formato dalle unioni finite di intervalli disgiunti della forma:*

$$(a, b] = \{x : a < x \leq b\}$$

dove $-\infty \leq a < b \leq \infty$ *con la convenzione che* $(a, +\infty] = (a, +\infty)$*, è un' algebra ma non una* σ*- algebra.*

Esercizio 6 *Lo spazio degli eventi elementari sia* $\Omega = [0, 1)$. C_1 *sia la collezione di intervalli del tipo* $[a, b)$ *con* $0 \le a < b < 1$*;* C_2 *sia la collezione di tutte le unioni finite di intervalli disgiunti compresi in* C_1. *Verificare che* C_1 *non è un'algebra e che* C_2 *non è una* σ*-algebra ma è un'algebra.*

Esercizio 7 *** *Sia* Ω *un'insieme e* Σ *una* σ*-algebra su* Ω. *Mostrare che la cardinalità di* Σ *non può essere numerabile. Inoltre in caso di cardinalità finita, mostrare che deve essere del tipo* 2^n *per qualche* $n \in \mathbb{N}^*$.

Esercizio 8 *Sia* $\mathcal{A}$ *una famiglia di sottoinciemi di un insieme* Ω. *Mostrare che le seguenti proprietà sono equivalenti*

1. *1.a)* $\Omega \in \mathcal{A}$,
   1.b) $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c := \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$,
   1.c) $A, B \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$;
2. *2.a)* $\Omega \in \mathcal{A}$,
   2.b) $A, B \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$;

Esercizio 9

1. *Sia* β *una collezione di insiemi (ed esempio si pensi ad una collezione di* σ*-algebre). Si mostri che le seguenti affermazioni sono equivalenti:*
   - *(i) esiste* $A \in \beta$ *tale che per ogni* $B \in \beta$ *si ha* $B \supseteq A$;
   - *(ii)* $\bigcap_{B \in \beta} B \in \beta$.

   In tal caso $A = \bigcap_{B \in \beta} B \in \beta$.
2. *Sia* β *una collezione non vuota di* σ*-algebre (risp. algebre) su* Ω*, mostrare che* $\bigcap_{B \in \beta} B$ *è ancora una* σ*-algebra (risp. algebra) su* Ω.
3. *Se* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ *e sia* β *la collezione di* σ*-algebre su* Ω *che contengono* $\mathcal{A}$*, mostrare che esiste la più piccola* σ*-algebra con questa proprietà; tale insieme viene chiamato la* σ*-algebra generata da* $\mathcal{A}$ *e viene indicato con* $\sigma(\mathcal{A})$.
4. * *Sia* p *una proprietà,* Ω *un insieme ed* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. *Se*
   - *(i)* $p(\emptyset)$ *(si legga "l'insieme* $\emptyset$ *soddisfa* p*");*
   - *(ii)* $p(A) \Longrightarrow p(\Omega \setminus A)$ *per ogni* $A \subseteq \Omega$;
   - *(iii) se per ogni famiglia al più numerabile di sottoinsiemi di* Ω $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $p(A_i)$ *per ogni* $i \in \mathbb{N}$ *implica* $p(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i)$

   allora la condizione $p(A)$ *per ogni* $A \in \mathcal{A}$ *è sufficiente affinché si abbia* $p(A)$ *per ogni* $A \in \sigma(\mathcal{A})$.

Esercizio 10 *Sia* $\Omega := \mathbb{R}^n$ *e* d *la distanza euclidea su* $\mathbb{R}^n$ *(*$B(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) < r\}$*). Si consideri*

$$\mathcal{A} := \{A \subseteq \mathbb{R}^n : \exists \epsilon > 0 : B(0,\epsilon) \subseteq A \text{ oppure } B(0,\epsilon) \subseteq A^c\}$$

dove $0 \in \mathbb{R}^n$ *è l'origine. Mostrare che* $\mathcal{A}$ *è un'algebra ma non una* σ*-algebra Qual è la* σ*-algebra generata da* $\mathcal{A}$*?*

Esercizio 11 ** *Sia* $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ *una partizione di* Ω *(i.e.* $A_i \neq A_j$ *implica* $A_i \cap A_j = \emptyset$*, inoltre* $A_i \not\emptyset$ *per ogni* $i \in I$ *ed infine* $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$*); allora per l'algebra e la* σ*-algebra generate da* $\mathcal{A}$ *vale*

$$A(\mathcal{A}) = \{\bigcup_{i \in J} A_i : J \text{ oppure } I \setminus J \text{ finito}\}$$
$$\sigma(\mathcal{A}) = \{\bigcup_{i \in J} A_i : J \text{ oppure } I \setminus J \text{ al più numerabile}\}$$

(si ricordi che $\bigcup_{i \in \emptyset} A_i = \emptyset$*). Se ne deduca che la più piccola* σ*-algebra che contiene i singoletti di* Ω *è* $\{J \subseteq \Omega : J \text{ oppure } \Omega \setminus J \text{ al più numerabile}\}$.

Esercizio 12 ** *Sia* Ω *uno spazio campionario e* $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *una partizione numerabile di* Ω*, ovvero una famiglia di sottoinsiemi di* Ω *con le seguenti proprietà:*

1. $D_i \cap D_j = \emptyset$ *per ogni* $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{N}$
2. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n = \Omega$

Verificare che la più piccola σ*-algebra che contiene* $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *è descritta nel modo seguente:*

$$\mathcal{D} = \{\emptyset, \bigcup_{i \in I} D_i, \forall I : I \subseteq \mathbb{N}\}$$

Esercizio 13 *Sia* $\{A_i\}_{i \in I}$ *una collezione di sottoinsiemi di* Ω*; definito* $\{0,1\}^I$ *lo spazio di tutte le funzioni definite su* I *a valori in* $\{0,1\}$*, sia* A_g *la funzione da* I *a valori nell'insieme delle parti di* Ω*,* $\mathcal{P}(\Omega)$*, definita da*

$$A_g(i) := \begin{cases} A_i & g(i) = 1 \\ \Omega \setminus A_i & g(i) = 0. \end{cases}$$

Se $g(A) := \bigcap_{i \in I} A_g(i)$*, allora si mostri che* $\{g(A)\}_{g \in \{0,1\}^I}$ *è una partizione di* Ω.

Esercizio 14 * *Sia* $A, B, A_i \in X$ *per ogni* $i \in \Gamma$ *ed* $f : Y \to X$*; allora*

1.
   - $f^{-1}\left(\bigcap_{i \in \Gamma} A_i\right) = \bigcap_{i \in \Gamma} f^{-1}(A_i)$,
   - $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in \Gamma} A_i\right) = \bigcup_{i \in \Gamma} f^{-1}(A_i)$,
   - $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$ *(e quindi* $f^{-1}(A)^c = f^{-1}(A^c)$*);*

- $f\left(\bigcup_{i\in\Gamma} A_i\right) = \bigcup_{i\in\Gamma} f(A_i)$,
- $f\left(\bigcap_{i\in\Gamma} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in\Gamma} f(A_i)$ *(in realtà questa è un'uguaglianza per ogni scelta di* $\{A_i\}$ *se e solo se* f *è iniettiva),*
- $f(A \setminus B) \supseteq f(A) \setminus f^{-1}(B)$
- $f(A^c) \setminus f(A)^c \neq \emptyset$ *(l'uguaglianza per ogni scelta di* A *equivale all'iniettività di* f*) ed infine* $f(A)^c \setminus f(A^c) \neq \emptyset$ *(l'uguaglianza per ogni scelta di* A *equivale alla suriettività di* f*);*

2. *se definiamo, per ogni* $\mathcal{A} \subseteq Y$,
$$\sigma(\mathcal{A}) := \bigcap_{\beta \supseteq \mathcal{A}, \beta\ \sigma\text{-algebra}} \beta$$
la σ*-algebra generata da* $\mathcal{A}$ *allora mostrare che*
$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{A})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{A})).$$

Esercizio 15 *Sia* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *spazio misurabile (si pensi pure ad uno spazio di probabilità) e sia* $\mathcal{F}_1 := \{A \in \mathcal{F} : \mu(A) = 0 \text{ oppure } \mu(A^c) = 0\}$*; mostrare che* $\mathcal{F}_1$ *è una* σ*-algebra.*

Esercizio 16 *

1. *Sia* X *un insieme e* $\mathcal{A}$ *una collezione di sottoinsiemi di* X*. Si mostri che*
$$\sigma(\mathcal{A}) = \bigcup_{\substack{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \text{ al più numerabile}}} \sigma(\mathcal{B}).$$

2. *Sia* X *un insieme e* $\{\beta_i\}_{i\in\Gamma}$ *una collezione di* σ*-algebre tali che se* $\{i_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *è una successione in* Γ *allora esiste* $\gamma \in \Gamma$ *tale che* $\beta_\gamma \supseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \beta_{i_j}$*; allora* $\bigcup_{i\in\Gamma} \beta_i$ *è una* σ*-algebra.*

Esercizio 17 *Sia* X *un insieme,* $d : X \times X \mapsto \mathbb{R}_+$ *si chiama predistanza se verifica le seguenti tre proprietà*

(i) $d(x, x) = 0, \quad \forall x \in X$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x), \quad \forall x, y \in X$;

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \quad \forall x, y, z \in X$.

1. *Mostrare che la relazione*
$$x \sim y \iff d(x, y) = 0$$
è una relazione di equivalenza e che $\overline{d}([x], [y]) := d(x, y)$ *è una ben definita distanza su* $X/_\sim$ *(dove* $[x]$ *rappresenta la classe di equivalenza cui appartiene* x*).*

2. *Mostrare che data una misura di probabilità μ (o più in generale una qualsiasi misura poritiva) definita su $(\Omega, \mathcal{F})$ si ha che*

$$d(A,B) := \mu(A \triangle B), \qquad \forall A, B \in \mathcal{F}$$

è una predistanza (dove $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$).

SOLUZIONI

Soluzione esercizio 1.

1. Si ha $\Omega := \{(x,y) : x, y \in \{1,2,3,4,5,6\}\} = \{1,2,3,4,5,6\}^2$, dove la coppia (esito del primo lancio,esito del secondo lancio) rappresenta l'evento elementare; si scelga la σ-algebra $\Sigma := \mathcal{P}(\Omega)$ (cioè l'insieme delle parti di Ω).

2. Poniamo A=" Adalberto vince " e B = " Bertolasio vince"' si ha:

   (a) $A = \{(x,y) : x \text{ pari}, y \in \{1,2,3,4,5,6\}\} = \{2,4,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$

   (b) $B = \{(x,y) : x \in \{1,\dots,6\}, y \in \{1,2,3\}\} = \{1,\dots,6\} \times \{1,2,3\}$

   (c) $A^c = \{1,3,5\} \times \{1,\dots,6\}$

   (d) $B^c = \{1,\dots,6\} \times \{4,5,6\}$

   (e) $A \cap B = \{2,4,6\} \times \{1,2,3\}$

   (f) $A \cap B^c = \{2,4,6\} \times \{4,5,6\}$

   (g) $A^c \cap B = \{1,3,5\} \times \{1,2,3\}$

   (h) $A^c \cap B^c = \{1,3,5\} \times \{4,5,6\}$

   (i) $A \cup B = (\{2,4,6\} \times \{1,\dots,6\}) \cup (\{1,3,5\} \times \{1,2,3\})$

   (j) $A^c \cup B^c = (\{1,3,5\} \times \{1,\dots,6\}) \cup (\{2,4,6\} \times \{4,5,6\})$

   (k) $(A^c \cap B) \cup (A \cap B^c) = (\{1,3,5\} \times \{1,2,3\}) \cup (\{2,4,6\} \times \{4,5,6\})$

   (l)

   $$\{(1,6),(2,3),(2,6),(3,2),(3,4),(3,6),(4,3),(4,6),(5,6),(6,1),(6,2),\\ (6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

   (m) $\emptyset$

   (n) Ω

Soluzione esercizio 2.

1. $A \cup B \cup C$,
2. $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c) \equiv (B \cup C)^c \cup (A \cup B)^c \cup (A \cup C)^c$
3. $A^c \cap B^c \cap C^c$
4. $A \cap B \cap C$
5. $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$
6. $(A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C)$

Soluzione esercizio 3.

Osserviamo subito che se $x, y \in \{0,1\}^n$, $x \neq y$ allora $f(x) \cap f(y) = \emptyset$. Per provare l'asserto bisogna dimostrare che

1. $\mathcal{F}$ è una σ-algebra;
2. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$;
3. per ogni σ algebra $\mathcal{F}_1 \supseteq \mathcal{A}$ si ha $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_1$.

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$. Se $B \in \mathcal{F}$ allora esiste $\beta \in \{0,1\}^n$ tale che $B = \bigcup_{x \in \beta} f(x)$; pertanto, essendo (provare per induzione su n) $\bigcup_{x \in \{0,1\}^n} f(x) = \Omega$, si ha $B^c = \bigcup_{x \in \beta^c} f(x)$. Siano $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ e $\{\beta_i\}$ tali che $B_i = \bigcup_{x \in \beta_i} f(x)$ allora $\bigcup_i B_i = \bigcup_{x \in \bigcup_i \beta_i} f(x)$.
2. $A_i = \bigcup_{x : x_i = 1} f(x)$.
3. è banale, poiché per ogni $x \in \{0,1\}^n$, $f(x) \in \sigma(\mathcal{A})$.

Supponiamo ora che $A, B \in \mathcal{A}$ e $A \neq B$; allora esistono $x, y \in \{0,1\}^n$ tali che $x \neq y$ e $A = f(x)$ e $B = f(y)$. Pertanto esiste $i \in \{1, \ldots, n\}$ tale che $x_i \neq y_i$ da cui

$$\begin{cases} A & \subseteq A_i \\ B & \subseteq A_i^c \end{cases} \text{oppure} \begin{cases} A & \subseteq A_i^c \\ B & \subseteq A_i. \end{cases}$$

In qualsiasi caso si ha $A \cap B = \emptyset$. Inoltre per ogni $\omega \in \Omega$ si ha che $\omega \in f(x)$ dove $x_i := \mathbb{1}_{A_i}(x)$ e quindi $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \Omega$. Pertanto $\mathcal{A} \setminus \{\emptyset\}$ è una partizione di Ω.

Soluzione esercizio 4.

1. Abbiamo $\Omega = \{(T,1) = \omega_1, (T,2) = \omega_2, (T,3) = \omega_3, (T,4) = \omega_4, (T,5) = \omega_5, (T,6) = \omega_6, (C,C) = \omega_7, (C,T) = \omega_8\}$ dove la coppia (esito del primo lancio,esito del secondo lancio) rappresenta l'evento elementare. La σ-algebra è quella delle parti.

2. Gli eventi elementari non sono decomponibili (X è decomponibile in $\mathcal{A}$ se esistono $A, B \in \mathcal{A}$ tali che $A, B \neq \emptyset$, $A \cup B = X$) perciò ogni elemento non vuoto dell'insieme delle parti si può ottenere come unione finita (disgiunta) di eventi elementari:

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{A : A \subset \Omega\} = \{\emptyset, \bigcup_{i \in I} \omega_i : I \subseteq [1, \ldots, 8]\}$$

3. Gli eventi sono $A = \{$ esce testa al primo lancio $\}$ ed il suo complementare $A^c = \{$ esce croce al primo lancio $\}$, dove

$$A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}, \quad A^c = \{\omega_7, \omega_8\}$$

4. La più piccola σ- algebra è $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$. Il fatto che sia la più piccola σ-algebra è immediato visto che per definizione deve contenere i sottoinsiemi A ed A^c, $\emptyset$ e il suo complementare Ω. Per verificare che $\mathcal{F}$ è una σ-algebra è sufficiente mostrare che si tratta di una famiglia di sottoinsiemi chiusa per l'operazione di passaggio al complementare e di unione numerabile (in questo caso finita).

5. È lasciato al lettore.

Osservazione. Nel risolvere il punto 3 si può scegliere di semplificare lo spazio campionario considerando come unici possibili risultati A ed A^c: quindi si sceglie $\Omega = \{A, A^c\}$ ed $\mathcal{F}$ diviene l'insieme $\mathcal{P}(\Omega)$. In questo caso descrivo l'esperimento del lancio di una sola moneta. In tal caso la nuova σ-algebra $\mathcal{F}$ raccoglie le informazioni relative solo al primo lancio, ovvero quegli eventi che sappiamo essersi verificati o meno dopo aver osservato l'esito del primo lancio.

Soluzione esercizio 5.

1. Mostriamo che $\mathcal{A}$ è un'algebra. Abbiamo che:
   (a) $\mathbb{R} = (-\infty, \infty) = (-\infty, \infty]$ è un elemento di $\mathcal{A}$;
   (b) se $B \in \mathcal{A}$ allora $B^c \in \mathcal{A}$, infatti se $B \in \mathcal{A}$ allora è della forma $B = \bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i]$ per un qualche $n \in \mathbb{N}$ con $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 < \cdots < a_n < b_n$. È facile vedere che $B^c = (-\infty, a_1] \cup (b_1, a_2] \cup \cdots \cup (b_n, +\infty]$, con eventualmente qualche intervallo vuoto se $b_i = a_{i+1}$ o $a_1 = -\infty$ o $b_n = \infty$, quindi $B^c \in \mathcal{A}$;
   (c) verifichiamo la chiusura di $\mathcal{A}$ rispetto all' intersezione: $A, B \in \mathcal{A}$, allora $A \cap B \in \mathcal{A}$. Abbiamo che $A = \cup_{i=1}^{k}(c_i, d_i]$ per un qualche $k \in \mathbb{N}$ e $B = \bigcup_{j=1}^{n}(a_j, b_j]$ per un qualche $n \in \mathbb{N}$. Allora:

$$A \cap B = \cup_{i=1}^{k}(c_i, d_i] \cap \bigcup_{j=1}^{n}(a_j, b_j] = \bigcup_{i=1}^{k}\bigcup_{j=1}^{n}\{(c_i, d_i] \cap (a_j, b_j]\}$$

e chiaramente ogni $\{(c_i, d_i] \cap (a_j, b_j]\}$ o è della forma $(\alpha, \beta]$ oppure è il vuoto. Quindi $A \cap B$ è della forma $\cup_{l=1}^m (\alpha_l, \beta_l]$ e di conseguenza appartiene ad $\mathcal{A}$.

Per mostrare che $\mathcal{A}$ non è una σ-algebra è sufficiente trovare una famiglia numerabile di elementi di $\mathcal{A}$ la cui unione non appartiene ad $\mathcal{A}$. Consideriamo $A_n = (0, 1 - \frac{1}{n}]$ al variare di $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, allora $\bigcup_{n=2}^\infty A_n = (0, 1) \notin \mathcal{A}$.

Soluzione esercizio 6.

1. C_1 non può essere un'algebra. Si considerino ad esempio gli intervalli $[0, 1/3)$ e $[1/2, 1)$: chiaramente sono elementi di C_1 ma $[0, 1/3) \cup [1/2, 1) \notin C_1$ e in alternativa si può far vedere che il non è chiusa rispetto al passaggio al complementare: infatti $[1/3, 1/2)^c = [0, 1/3) \cup [1/2, 1)$;
2. la verifica è semplice ed i dettagli vengono lasciati al lettore;
3. consideriamo la famiglia numerabile di eventi $A_n = [1/2, 1/2 + 1/n)$ al variare di $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, allora $A_n \in C_2$ per ogni $n \geq 2$ ma $\bigcap_{n=2}^\infty A_n = \{1/2\} \notin C_2$. Questo esempio è sufficiente per dimostrare che C_2 non è una σ-algebra.

Tuttavia se prendiamo un sottoinsieme B di Ω non contenuto in $\mathcal{A}$ ($B \notin \mathcal{A} \iff 0 \in \partial B$) si ha che, definito $B_n := B \backslash B(0, n)$, essendo $B \backslash \{0\} = \bigcup_{n=1}^\infty B_n$; inoltre $B_n \in \mathcal{A}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (infatti $B_n^c \supseteq B(0, n)$. Allora la σ-algebra generata $\sigma(\mathcal{A})$ contiene di sicuro $\{B \subseteq \mathbb{R} : 0 \notin B\}$, ma essendo altresì chiusa per complementazione $\{0\} \in \sigma(\mathcal{A}$ e quindi in definitiva $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ (dove, dato un qualsiasi insieme X, con $\mathcal{P}(X)$ si intende l' insieme delle parti di X).

Soluzione esercizio 7.
Ricordiamo che per definizione un insieme A si dice *n-Σ-decomponibile* se esistono $\{B_i\}_{i=1}^m$ elementi di Σ ($m \geq n$) tali che $A \cap B_i \neq \emptyset$ per ogni $i = 1, \ldots m$, $A \cap B_j \cap B_i = \emptyset$ per ogni $i \neq j$ e $\bigcup_{i=1}^m B_i \supseteq A$. In particolare un' insieme che sia n-Σ-decomponibile per ogni $n \in \mathbb{N}$ si dice *infinitamente Σ-decomponibile.*

Supponiamo che la cardinalità di Σ sia infinita e sia $A \in \Sigma$ tale che $A \neq \Omega$ e $A \neq \emptyset$. Se A è infinitamente decomponibile allora definiamo $A_1 := A^c$ e $\Omega_1 := A$; viceversa se A è finitamente decomponibile allora necessariamente (essendo Σ di cardinalità infinita) A^c è infinitamente decomponibile ed in tal caso $A_1 := A$ e $\Omega_1 := A^c$. Si supponga di aver costruito un insieme di insiemi misurabili disgiunti $\{A_1, \ldots, A_n\}$ e Ω_n; allora si decompone Ω_n (che è infinitamente decomponibile) in A e $\Omega_n \setminus A$. Come in precedenza se A è infinitamente decomponibile allora definiamo $A_{n+1} := \Omega_n \setminus A$ e $\Omega_{n+1} := A$; viceversa se A è finitamente decomponibile allora necessariamente $\Omega_n \setminus A$ è infinitamente decomponibile ed in tal caso $A_{n+1} := A$ e $\Omega_{n+1} := \Omega_n \setminus A$. Per induzione si ottiene una famiglia numerabile di insiemi misurabili disgiunti $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$; si consideri la funzione $f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \Sigma$ così definita

$$f(x) := \bigcup_{i\in\mathbb{N}:x_i=1} A_i,$$

si mostra facilmente che tale funzione è iniettiva e poichè la cardinalità di $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ è strettamente maggiore del numerabile, lo stesso vale per la cardinalità di Σ.

Infine sia $\mathrm{card}(\Sigma)$ finita. Dall'esercizio 3 si ha che è generata da una partizione. Sia n la cardinalità della partizione, ancora dall'esercizio 3 si ha che f diviene una funzione iniettiva, la suriettività è garantita dal fatto che la sua immagine è tutta la σ-algebra; quindi $\mathrm{card}(\Sigma) = \mathrm{card}(\{0,1\}^n) = 2^n$.

Soluzione esercizio 8.

Osserviamo preliminarmente che se $A, B \subseteq \Omega$ allora $A^c := \Omega \setminus A$ e $A \setminus B = A \cap B^c$.

Se vale (1) allora evidentemente vale (2.a) ed inoltre se $A, B \in \mathcal{A}$ si ha $A^c \in \mathcal{A}$ da cui $A^c \cup B \in \mathcal{A}$ ed infine $A \setminus B = (A^c \cup B)^c \in \mathcal{A}$.

Viceversa se vale (2) allora evidentemente vale (1.a), inoltre se $A \in \mathcal{A}$ allora $A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ ed infine se $A, B \in \mathcal{A}$ allora $A^c \in \mathcal{A}$ da cui $A^c \cap B^c = A^c \setminus B \in \mathcal{A}$ pertanto $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \in \mathcal{A}$.

Soluzione esercizio 9.

1. Si osservi che $A \subseteq B$ per ogni $B \in \beta$ se e solo se $A \subseteq \bigcap_{B\in\beta} B$, pertanto se vale (i) si ha che $A \supseteq \bigcap_{B\in\beta} B$ e quindi

$$\begin{cases} A = \bigcap_{B\in\beta} B \\ \bigcap_{B\in\beta} B \in \beta. \end{cases}$$

   Viceversa definendo $A := \bigcap_{B\in\beta} B$ da (ii) si ha (i).

2. Verifichiamo l'asserto per una σ-algebra (per l'algebra è analogo ed è lasciato al lettore).

   a) Poiché $\emptyset \in B$ per ogni $B \in \beta$ allora $\emptyset \in \bigcap_{B\in\beta} B$;

   b) se $A \in \bigcap_{B\in\beta} B$ allora equivalentemente $A \in B$ per ogni $B \in \beta$ da cui $A^c \in B$ per ogni $B \in \beta$ che equivale a $A \in \bigcap_{B\in\beta} B$;

   c) se $A_i \in \bigcap_{B\in\beta} B$ per ogni $i \in \mathbb{N}$ allora equivalentemente $A_i \in B$ per ogni $i \in \mathbb{N}$ e per ogni $B \in \beta$ da cui $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in B$ per ogni $B \in \beta$ che equivale a $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \bigcap_{B\in\beta} B$.

   - Dal punto precedente di questo esercizio si ha che $\bigcap_{B\in\beta} B \in \beta$ e dal primo punto si ha che è l'elemento minimo di β.

- L'insieme $\Sigma := \{A \subseteq \Omega : p(A)\}$ è una σ-algebra, se in più $\Sigma \supseteq \mathcal{A}$ allora $\Sigma \in \beta$ (β definito come nel punto precedente dell'esercizio, pertanto $\Sigma \supseteq \sigma(\mathcal{A})$.

Soluzione esercizio 10.
Banalmente

- $\Omega \in \mathcal{A}$;
- se $H \in \mathcal{A}$ allora $H^c \in \mathcal{A}$ essendo la definizione di $\mathcal{A}$ simmetrica nello scambio tra A e A^c (ricordare che $A = (A^c)^c$);
- Se $H, K \in \mathcal{A}$ allora si possono avere due casi
  a) esiste $\epsilon > 0$ tale che $B(0, \epsilon)$ è sottoinsieme di almeno uno dei due (diciamo H), allora $H \cup K \supseteq B(0, \epsilon)$ pertanto $H \cup K \in \mathcal{A}$;
  b) esistono $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ tali che $B(0, \epsilon_1) \subseteq H^c$ e $B(0, \epsilon_2) \supseteq K$ da cui $B(0, \min(\epsilon_1, \epsilon_2)) \subseteq \mathcal{A}$ ed essendo $\min(\epsilon_1, \epsilon_2) > 0$ si ha che $(H \cup K)^c = H^c \cap K^c \supseteq B(0, \min(\epsilon_1, \epsilon_2))$.

Questo ci dice che $\mathcal{A}$ è un'algebra ma non una σ-algebra, infatti $\{0\} \notin \mathcal{A}$, tuttavia $\{0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} B(0, 1/n)$. Inoltre $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Infatti Se $A \subseteq \mathbb{R}$ si ha

$$A = \begin{cases} \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap B(0, 1/n)^c) & \text{se } 0 \notin A \\ \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap B(0, 1/n)^c) & \text{se } 0 \in A. \end{cases}$$

Soluzione esercizio 11.
Ci limitiamo al caso della σ-algebra, per il caso dell'algebra lasciamo i dettagli al lettore. Come al solito, per provare che $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A})$, bisogna mostrare che

1. $\mathcal{F}$ è una σ-algebra;
2. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$;
3. per ogni σ algebra $\mathcal{F}_1 \supseteq \mathcal{A}$ si ha $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_1$.

Sia $\mathcal{F} := \{\bigcup_{i \in J} A_i : J$ oppure $I \setminus J$ al più numerabile$\}$.

1. $\bigcup_{i \in \emptyset} a_i = \emptyset$. Inoltre se $A \in \mathcal{F}$ allora esiste $J \subseteq I$ tale che $\bigcup_{i \in J} A_i = A$, quindi $A^c = \bigcup_{i \in J^c} A_i$; se J^c è al più numerabile non c'è nulla da dimostrare, mentre se J è al più numerabile allora $(J^c)^c \equiv J$ è al più numerabile e quindi in ogni caso $A^c \in \mathcal{F}$. Sia $\{B_n\}$ una collezione al più numerabile di elementi di $\mathcal{F}$ ($B_n = \bigcup_{i \in J_n} A_i$); ovviamente $\bigcup_n B_n = \bigcup_{i \in \bigcup_n J_n} A_i$. Se ogni J_n è al più numerabile allora $\bigcup_n J_n$ è al più numerabile, mentre se esiste n_0 tale che $A^c_{n_0}$ è al più numerabile allora $(\bigcup_n A_n)^c \subseteq A^c_{n_0}$ ed è al più numerabile. In ogni caso $\bigcup_n A_n \in \mathcal{F}$.

2. È banale.

3. Se J è al più numerabile allora $\bigcup_{i \in J} A_i \in \mathcal{F}_1$, mentre se J^c è al più numerabile allora $\bigcup_{i \in J^c} A_i \in \mathcal{F}_1$ e $\bigcup_{i \in J} A_i \in \mathcal{F}_1 = (\bigcup_{i \in J^c} A_i \in \mathcal{F}_1)^c \in \mathcal{F}_1$.

La seconda parte è il caso particolare $I = \Omega$ e $A_i := \{i\}$.

Soluzione esercizio 12

Mostriamo che $\mathcal{D}$ è una σ-algebra:

1. Per definizione $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ quindi scelgo $I = \mathbb{N}$ ed ottengo $\Omega \in \mathcal{D}$;
2. mostriamo che se $B \in \mathcal{D}$ allora $B^c \in \mathcal{D}$. Sia $B \in \mathcal{D}$ allora $B = \bigcup_{i\in I} D_i$ per un qualche insieme di indici $I \subseteq \mathbb{N}$, quindi $B^c = \Omega \setminus \bigcup_{i\in I} D_i = \bigcup_{j\in\mathbb{N}\setminus I} D_j$. Ma $\mathbb{N} \setminus I$ è ancora un sottoinsieme di $\mathbb{N}$, da cui $B^c \in \mathcal{D}$;
3. sia $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di elementi di $\mathcal{D}$, mostriamo che $\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k \in \mathcal{D}$. Per ogni B_k esiste un insieme di indici al più numerabile $I_k \subseteq \mathbb{N}$ tale che $B_k = \bigcup_{i_k\in I_k} D_{i_k}$. Quindi

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=0}^{\infty} \left(\bigcup_{i\in I_k} D_i \right) = \bigcup_{i\in\bigcup_{k=0}^{\infty} I_k} D_i$$

   Poniamo $I = \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k$, ovviamente $I \subseteq \mathbb{N}$, quindi concludiamo che $\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k = \bigcup_{i\in I} D_i \in \mathcal{D}$.

   Inoltre se $\mathcal{D}_1$ é un'altra σ-algebra tale che $\mathcal{D}_1 \supset \{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ allora per definizione deve contenere il vuoto e tutte le unioni numerabili dei suoi elementi e quindi $\mathcal{D}$. Perciò $\mathcal{D}$ è la più piccola σ-algebra.

Soluzione esercizio 13.

Se $g, h \in \{0,1\}^I$ allora $g \neq h$ se e solo se esiste $i_o \in I$ tale che $g(i_0) \neq h(i_0)$; sia, senza perdita di generalità, $g(i_0) = 1$ ed $h(i_0) = 0$ da cui, essendo $g(A) \subseteq A_{i_0}$ ed $h(A) \subseteq \Omega \setminus A_{i_o}$, si ha $g(A) \cap h(A) = \emptyset$.

Viceversa se $\omega \in \Omega$ e

$$g_\omega(i) := 1_{A_i}(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A_i \\ 0 & \omega \notin A_i \end{cases}$$

quindi $\omega \in g_\omega(A)$.

Soluzione esercizio 14.

1. È facile e viene lasciato al lettore.
2. Dal punto precedente si ha che $f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))$ è una σ-algebra, contenente $f^{-1}(\mathcal{A})$ pertanto, dalla definizione di σ-algebra generata, $f^{-1}(\sigma(\mathcal{A})) \supseteq \sigma(f^{-1}(\mathcal{A}))$.

Viceversa sia β una σ-algebra conetenente $f^{-1}(\mathcal{A})$ allora, definita $\beta_f := \{H : f^{-1}(H) \in \beta\}$ si ha che quest'ultima è una σ-algebra (provare!!) e vale $f^{-1}(\beta_f) \subseteq \beta$. Ovviamente $\beta_f \supseteq \mathcal{A}$ pertanto $\beta_f \supseteq \sigma(\mathcal{A})$ da cui

$$\beta \supseteq f^{-1}(\beta_f) \supseteq f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))$$

ed infine $f^{-1}(\sigma(\mathcal{A})) \subseteq \sigma(f^{-1}(\mathcal{A}))$, che considerato quanto mostrato in precedenza implica $f^{-1}(\sigma(\mathcal{A})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{A}))$.

Soluzione esercizio 15.

Test di Autovalutazione

Soluzione esercizio 16.

1. Definiamo
$$\beta := \bigcup_{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}} : \mathcal{B} \text{ al più numerabile } \sigma(\mathcal{B}).$$
Se $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ allora $\sigma(\mathcal{A}) \supseteq \sigma(\mathcal{B})$ pertanto
$$\sigma(\mathcal{A}) \supseteq \beta;$$
d'altra parte $\emptyset \in \beta$, se $A \in \beta$ si ha che $A^c \in \beta$ ed infine se $B_i \in \beta$ per ogni $i \in \mathbb{N}$ allora se $\mathcal{B} := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{B_i\}$ si ha $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \in \sigma(\mathcal{B}$ e quindi $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \in \beta$; pertanto β è una σ-algebra. Evidentemente $\beta \supseteq \mathcal{A}$ da cui $\beta \supseteq \sigma(\mathcal{A})$.

2. Se $\mathcal{B} \subseteq \bigcup_{i \in \Gamma} \beta_i =: \Omega$ è al più numerabile si ha che esiste β_γ tale che $\beta_\gamma \supseteq \mathcal{B}$ pertanto, dal punto precedente
$$\sigma(\Omega) = \bigcup_{\mathcal{B} \subset \Omega : \mathcal{B} \text{ al più numerabile}} \sigma(\mathcal{B}) \subseteq \Omega \subseteq \sigma(\Omega).$$

Soluzione esercizio 17.

1. Ovviamente da (i) si ha che $x \sim x$, da (ii) segue che $x \sim y$ implica $y \sim x$ ed infine da (iii) si ha che $x \sim z$ e $z \sim y$ consegue $x \sim y$; pertanto la relazione $\sim$ è di equivalenza. Ovviamente per ogni $x, y, x_1, y_1 \in X$ si ha
$$|d(x, y) - d(x_1, y_1)| \leq d(x, x_1) + d(y, y_1)$$
pertanto se $x \sim x_1$ e $y \sim y_1$ si ha che $d(x, y) = d(x_1, y_1)$ da cui $\overline{d}$ è ben definita (non dipendendo dal rappresentante scelto). È facile verificare che valgono per $\overline{d}$ le proprietà (i), (ii), e (iii) e che se $d([x], [y]) = 0$ allora $x \sim y$ e quindi $[x] = [y]$. Pertanto $\overline{d}$ è una distanza su $X/_\sim$.

2. Si osservi che essendo $A\triangle A = \emptyset$ si ha che $\mu(A\triangle A) = 0$; inoltre $A\triangle B = B\triangle A$ pertanto $\mu(A\triangle B) = \mu(B\triangle A)$; infine $A\triangle B \subseteq (A\triangle Z) \cup (Z\triangle B)$, infatti

$$x \in A \setminus B \Rightarrow \begin{cases} x \in (A \setminus B) \cap Z \Rightarrow x \in Z \setminus B \subseteq Z\triangle B \\ \text{oppure} \\ x \in (A\setminus) \cap Z^c \Rightarrow x \in A \setminus Z \subseteq Z\triangle A \end{cases}$$

e similmente se $x \in B \setminus A$. Quindi $\mu(A\triangle B) \leq \mu((A\triangle Z) \cup (Z\triangle B)) \leq \mu(A\triangle Z) + \mu(Z\triangle B)$.