2 Esercitazione 2: / /

2.1 Assegnazione di probabilità

Esercizio 1 *Cinque corde di lunghezze diverse* $(1metro, 2metri, 3metri, 4metri, 5metri)$ *vengono sottoposte ad un test per vedere quale si romperà per prima. Si supponga che la probabilità che una corda si rompa per prima sia proporzionale alla sua lunghezza. Si determini la probabilità che la lunghezza della corda che si rompe per prima sia minore o uguale a tre metri.*

Esercizio 2 *La probabilità che una gomma di un auto di Formula 1 abbia, alla fine della gara, k bolle sulla superficie è data dalla legge:*

$$p_k = \begin{cases} cp(1-p) & \text{se } k = 0 \\ cp^k & \text{se } k = 1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $p \in (0, 1)$ *ed* $n \in \mathbb{N}$ *sono valori fissati e c è una costante da determinare,*

1. *per quali valori reali di c i pesi assegnati definiscono una probabilità?*
2. *se* $n = 6$ *e* $p = \frac{2}{3}$*, qual è la probabilità che una gomma scelta a caso abbia almeno una bolla?*

Esercizio 3 *Un dado è truccato in modo che la probabilità con cui esce un dato valore è inversamente proporzionale al numero stesso. Quanto vale la probabilità che esca un numero pari?*

Esercizio 4 *Consideriamo il seguente esperimento: scegliamo casualmente un numero intero tra* 1 *e* k *(con* $k \in \mathbb{N}$ *fissato) ciascuno con probabilità* $1/k$*, ripetutamente fino a quando non osserviamo la stesso risultato avuto all'inizio e poi terminiamo l'esperimento. Ad ogni possibile risultato dell'esperimento che termina in esattamente n lanci consecutivi abbiniamo il peso* c^{-n} *dove c è una costante positiva da determinare.*

1. *Determinare il più piccolo spazio campionario che descriva tutti i possibili esiti dell'esperimento e trovare il valore di c in modo che i pesi assegnati definiscano una probabilità.*
2. *Sia* $k = 2$*; sostituendo il valore c trovato nel punto precedente, calcolare la probabilità che l'esperimento abbia termine dopo almeno 7 lanci.*
3. *Sia* $k = 2$*; sostituendo il valore c trovato nel punto 1, calcolare la probabilità che l'esperimento abbia termine dopo un numero pari di lanci.*

2.2 Proprietà della misura di probabilità

Esercizio 5 *Una ditta riceve richieste di forniture, che possono essere urgenti oppure no, e richiedere la consegna in città oppure fuori città. Per una data richiesta è noto che:*
i) la probabilità che sia una consegna fuori città è 0.4.
ii) la probabilità che sia una consegna urgente è 0.3.
iii) la probabilità che sia una consegna non urgente in città è 0.4.
Calcolare:
a) la probabilità che sia una consegna urgente in città;
b) la probabilità che sia una consegna urgente fuori città.

Esercizio 6 *Tre eventi A, B e C (nello spazio $(\Omega, \Sigma_\Omega, \mathbb{P})$) sono tali che $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 1$, $A \cap B = \emptyset$, si sa che $\mathbb{P}(A) = 0.3$, $\mathbb{P}(B) = 0.5$ e $\mathbb{P}(B \cap C) \leq 0.3$. Cosa si puo' dire su $\mathbb{P}(C)$?*

Esercizio 7 *Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità e siano A e B due eventi appartenenti ad $\mathcal{F}$, con probabilità $\mathbb{P}(A) = 0.4$ e $\mathbb{P}(B) = 0.7$, rispettivamente. Date le seguenti affermazioni dire quali sono certamente false, quali sono certamente vere e quali possono essere vere o false:*

$$\begin{array}{l}
1)\ \mathbb{P}(A \cup B) = 0.4 \\
2)\ \mathbb{P}(A \cup B) = 0.7 \\
3)\ \mathbb{P}(A \cup B) \geq 0.7 \\
4)\ \mathbb{P}(A \cup B) = 1.1 \\
5)\ \mathbb{P}(A \cap B) = 0.28 \\
6)\ \mathbb{P}(B \cap A^c) \geq 0.3 \\
7)\ \mathbb{P}(A \cap B^c) \leq 0.3
\end{array}$$

Inoltre nei casi che possono essere sia veri che falsi si dia un esmpio per ciascuna delle due possibilità (sugg. si utilizzi lo spazio $(\Omega, \Sigma_\Omega, \mathbb{P})$ dove $\Omega := [0, 1]$, Σ_Ω : generata dagli intervalli e $\mathbb{P}$ tale che sugli intervalli vale $\mathbb{P}([a, b] = b - a$ (misura di Lebesgue)).

Esercizio 8 *Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità, mostrare che:*

1. *sia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di elementi di $\mathcal{F}$ tale che $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots A_n \subset \dots$ allora:*

   $$\mathbb{P}(\cup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

   [continuità da sotto della $\mathbb{P}$]

2. *sia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di elementi di $\mathcal{F}$ tale che $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots A_n \supset \dots$ allora:*

   $$\mathbb{P}(\cap_{n=1}^{+\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

   [continuità da sopra della $\mathbb{P}$]

Esercizio 9 ** *Mostrare che per una funzione* $\mathbb{P} : \Sigma_\Omega \to [0, +\infty]$ *le seguenti affermazioni sono equivalenti*

1. *per ogni sequenza* $\{A_i\}_{i \in I}$ *al più numerabile tale che* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *se* $i \neq j$ *allora*
$$\mathbb{P}(\cup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$
(σ-additività).

2. *per ogni sequenza finita* $\{A_i\}_{i \in I}$ *tale che* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *se* $i \neq j$ *allora*
$$\mathbb{P}(\cup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$
(finita additività); per ogni sequenza decrescente $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ *tale che* $\cap_i A_i = \emptyset$ *si ha* $\lim_i \mathbb{P}(A_i) = 0$ *ed infine per ogni sequenza crescente* $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ *tale che* $\mathbb{P}(\cup_i A_i) = +\infty$ *allora si ha* $\lim_i \mathbb{P}(A_i) = +\infty$.

Esercizio 10 ** *Sia* $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ *una sequenza di numeri positivi tale che* $p_n \downarrow 0$ *se* $n \to +\infty$. *Mostrare che le due affermazioni seguenti sono equivalenti:*

1. $\sum_{i>n} p_i \geq p_n$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}^*$;
2. *per ogni* $\alpha \in [0, \sum_{i \in \mathbb{N}^*} p_i] \subseteq \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ *esiste* $A \subseteq \mathbb{N}^*$ *tale che* $\sum_{i \in A} p_i = \alpha$.

In particolare se $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ *è una partizione di* Ω *tale che* $\mathbb{P}(E_i) = 1/2^i$ *allora per ogni* $\alpha \in [0, 1]$ *esiste un evento* $E \in \sigma(\{E_i : i \in \mathbb{N}\})$ *tale che* $\mathbb{P}(E) = \alpha$.

2.3 Probabilità uniforme e problemi di conteggio

Esercizio 11 *Usando le dieci cifre disponibili nel sistema decimale, calcolare:*

a *quanti numeri telefonici di* 5 *cifre si possono comporre,*

b *quanti numeri di* 5 *cifre si possono comporre in modo che contengano un solo* 3,

c *quanti sono i numeri di telefono di* 5 *cifre che contengono solo cifre pari,*

d *quanti numeri di* 5 *cifre si possono comporre in modo che abbiano come prima cifra il numero* 3.

Si risolvano i punti a-b-c-d nelle due ipotesi seguenti:

1. *le cifre possono essere ripetute,*
2. *le cifre non possono essere ripetute.*

Calcolare la probabilità che un numero di telefono di 5 *cifre contenga un solo* 3 *nelle due ipotesi* 1 *ed* 2.

Esercizio 12 *Giulio ha* 10 *chiavi in una tasca dei pantaloni ma solo una apre la porta della sua cantina. Non si ricorda mai qual è così tutte le volte le prova una dopo l'altra avendo l'accortezza di porre i tentativi falliti nell' altra tasca. Con quale probabilità Giulio apre la porta al quinto tentativo ?*

Esercizio 13 *(Problema dei compleanni) Si pescano causalmente (con reimmissione) k numeri nell'insieme $\{1, \ldots, , n\}$ (ciascuno ha probabilità $1/n$ di essere estratto e le estrazioni sono indipendenti). Calcolare qual è la probabilità di avere almeno due estrazioni uguali. Calcolare, con le precedenti assunzioni, qual è la probabilità che in un aula di* 50 *studenti vi siano almeno due persone che hanno lo stesso compleanno.*

Esercizio 14 *Un giocatore di bridge riceve* 13 *carte da un mazzo di* 52*.*

1. *Quante sono le possibili mani che il giocatore riceve?*
2. *Qual è la probabilità di ricevere almeno* 2 *assi ?*
3. *Qual è la probabilità di ricevere* 13 *carte dello stesso seme ?*
4. *Qual è la probabilità di ricevere* 5 *fiori,* 4 *cuori,* 3 *picche e* 1 *quadri?*
5. *Ora il giocatore estrae a caso* 2 *carte dal mazzo. Con quale probabilità la prima è di picche e la seconda di fiori?*

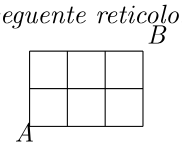
Esercizio 15 *Una coppia ordinata di numeri interi (x, y) individua, su un piano cartesiano, un punto $P(x, y)$ detto nodo. Si supponga che un punto mobile, a partire dall'origine si sposti compiendo una traiettoria costituita solo da segmenti unitari e si imponga la condizione che gli spostamenti possano avvenire solo verso destra (asse positivo delle ascisse) o verso l'alto (asse positivo delle ordinate). Determinare il numero dei possibili tragitti congiungenti l'origine con il generico punto $P(x, y)$.*

Esercizio 16 *Un mazzo di 52 carte contenente esattamente 26 carte rosse e 26 nere viene diviso a metà. Si determini la probabilità che ognuna delle due parti contenga carte rosse e nere in egual numero.*

Esercizio 17 *Un dado non truccato viene lanciato più volte. Quanti lanci devono essere fatti per avere una probabilità maggiore di $\frac{1}{2}$ di ottenere almeno un* 6

Esercizio 18 *Un guidatore impaziente sta viaggiando sulla tangenziale a* 4 *corsie, ritiene di poter andare più velocemente se ogni minuto cambia corsia. Supponendo che i cambiamenti di corsia avvengano a caso (e che non ci siano incidenti!) in quanti modi, dopo* 4 *minuti, si ritrova sulla corsia originaria? Supponendo che ad ogni cambio di corsia la scelta venga cada con ugual probabilità su una delle corsie vicine, qual è la probabilità di trovarsi dopo 4 minuti sulla corsia originaria?*

Esercizio 19 *Si consideri il seguente reticolo:*



In quanti modi si può andare da A a B potendosi spostare solo di un passo verso destra o verso l'alto alla volta?

Esercizio 20 ** *Mostrare che se $N, M, n, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ sono scelti in maniera tale che $N \geq n = \sum_{i=1}^k n_i$ e $N \geq M$ allora*

$$\sum_{m_1 \in \mathbb{N}, \ldots, m_k \in \mathbb{N} : 0 \leq m_i \leq n_i, \forall i=1,\ldots,k, \sum_{i=1}^k m_i = M} \frac{M!}{\prod_{i=1}^k m_i!} \frac{(N-M)!}{\prod_{i=1}^k (n_i - m_i)!} = \frac{N!}{\prod_{i=1}^k n_i!}$$

$$\sum_{m_1 \in \mathbb{N}, \ldots, m_k \in \mathbb{N} : 0 \leq m_i \leq n_i, \forall i=1,\ldots,k, \sum_{i=1}^k m_i = M} \prod_{i=1}^k \frac{n_i!}{m_i!(n_i - m_i)!} = \frac{N!}{M!(N-M)!}$$

Esercizio 21 *Una popolazione di N individui è suddivisa in k sottopopolazioni di cardinalità rispettivamente $n_1, \ldots, n_k$ (ovviamente $\sum_{i=1}^k n_i = N$). Supponendo gli individui tutti distinguibili, qual è la probabilità che prendendo M elementi a caso della popolazione, ve ne siano esattamente m_1 della sottopopolazione 1, m_2 della sottopopolazione 2, $\ldots$, m_k della sottopopolazione k?*

Esercizio 22 * *Un test del tipo vero/falso consistente di N domande, viene fatto contemporaneamente da due amici (Alberto e Bruno). Si sa che Alberto ha risposto esattamente a n domande e che le risposte comuni ad Alberto e Bruno sono M. Nessuno dei due conosce quali siano le risposte esatte; qual è la probabilità che Bruno abbia dato j risposte corrette? Calcolare esplicitamente nei casi $N = 10$, $n = 8$, $M = 6$ ed $N = 10$, $n = 4$,$M = 6$.*

2.4 Esercizi proposti

Esercizio 23 * *Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità con la proprietà che se $\mathbb{P}(A) > 0$ allora $\mathbb{P}(A) \geq \alpha > 0$ per ogni $A \in \mathcal{F}$. Sia X una variabile aleatoria a valori in uno spazio metrico separabile (Y, d) (bcon la σ-algebra di Borel, cioè generata dagli aperti).*

1. *Se $\alpha = 1$ allora esiste $y \in Y$ tale che $X = y$ $\mathbb{P}$-q.c.*
2. *In generale esiste $y_1, \ldots, y_j \in Y$, con $j \leq [1/\alpha]$ tale che $\mathbb{P}(X \in \{y_1, \ldots, y_j\}) = 1$.*

SOLUZIONI

Soluzione esercizio 1.
Poniamo $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_5\}$ dove $\omega_i =$ " la corda lunga i metri si rompe per prima". Su $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ vogliamo assegnare una probabilità $\mathbb{P}$ tale che: $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i = \alpha i$ per un certo valore α da determinare. Per trovare il valore di α tale che $(p_1, p_2, \ldots, p_5)$ determini una probabilità, risolviamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \alpha i \geq 0 & i = 1, \ldots, 5 \\ \sum_{i=1}^{5} \alpha i = 1 \end{cases}$$

Otteniamo $\alpha = 1/15$.

Sia A=" la lunghezza della corda che si rompe per prima è minore o uguale a tre metri ", allora $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Quindi si ha:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(\omega_i) = 1/15 + 2/15 + 3/15 = 2/5.$$

Soluzione esercizio 2.
I pesi assegnati suggeriscono che, scelta una gomma a caso in una certa popolazione, i possibili eventi elementari siano rappresentabili dagli elementi dello spazio campionario $\Omega = \{0, 1, \ldots, n\}$. Affinchè i pesi assegnati definiscano una probabilità è necessario e sufficiente che:

(a) $p_k \geq 0$, $\forall k : 0, \ldots, n$

(b) $\sum_{k=0}^{n} p_k = 1$

La condizione (a) implica che $c \geq 0$, infatti:

$$p_k \geq 0,\ \forall k = 0, \ldots, n \Longleftrightarrow \begin{cases} cp(1-p) \geq 0 \\ cp^k \geq 0, & \forall k : 1, \ldots, n \end{cases} \Longleftrightarrow \ c \geq 0$$

($p \neq 0, 1$ per ipotesi). In ogni caso ci si avvede immediatamente che una soluzione (se ve ne sono) della seconda equazione, implica che $c > 0$. Dalla condizione (b):

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1 \Longleftrightarrow c(p(1-p) + \sum_{k=1}^{n} p^k) = 1 \Longleftrightarrow c = \frac{1-p}{p[(1-p)^2 + 1 - p^n]}$$

Abbiamo utilizzato il fatto che $\sum_{k=1}^{n} p^k = \dfrac{p(1-p^n)}{1-p}$.

parte 2 Sia $n = 6$ e $p = \frac{2}{3}$.

$$\mathbb{P}(\{\text{" Una gomma scelta a caso ha almeno una bolla"}\}^c) = 1 - p_0,$$

quindi dobbiamo calcolare p_0. In questo caso abbiamo che:

$$c = \frac{1/3}{\frac{2}{3}[(\frac{1}{3})^2 + 1 - (\frac{2}{3})^6]} = 0.4886.$$

Quindi, p_0 risulta:

$$p_0 = 0.4886 * \frac{2}{9} = 0.1085,$$

da cui otteniamo che:

$$\mathbb{P}(\{\text{“ Una gomma scelta a caso ha almeno una bolla”}\}) = 1 - p_0 = 0.8915$$

Soluzione esercizio 3.

Consideriamo l'esperimento aleatorio di lanciare un dado ed osservare cosa compare sulla faccia superiore e sia X la variabile aleatoria dell'esperimento.. Lo spazio campionario più piccolo che contiene i possibili esiti è $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$. Poniamo $\mathbb{P}(\{i\}) = x/i$: gli eventi (al variare di $i \in \Omega$ sono incompatibili ed esauriscono Ω, quindi

$$x \sum_{i=1}^{6} 1/i = 1 = \mathbb{P}(\Omega)$$

da cui

$$\mathbb{P}(X \text{ sia pari}) = \frac{\sum_{i=2,4,6} 1/i}{\sum_{i=1}^{6} 1/i} = 220/588.$$

(Il calcolo di x restituisce un valore $x = 20/49$).

Soluzione esercizio 4.

1. I risultati dell'esperimento che contengono esattamenti n lanci possono essere solo della forma: $x \in \{1, \ldots, 6\}^n$ tali che $x_i \neq x_1$ per tutti i valori $i : 1 < i < n$ ed $x_1 = x_n$. Pertanto

   $$\Omega := \{x \in \{1, \ldots, 6\}^n : n \geq 2, x_i \neq x_1 \ \forall 1 < i < n, x_1 = x_n\},$$

   una partizione di Ω è data da $\{\Omega_n\}_n$ dove

   $$\Omega_n := \{x \in \{1, \ldots, 6\}^n : n \geq 2, x_i \neq x_1 \ \forall 1 < i < n, x_1 = x_n\},$$

   evidentemente $\text{card}(\Omega_n) = k(k-1)^{n-2}$ (provare!). Notiamo che Ω è numerabile e la σ-algebra deve contenere i singoletti, quindi deve essere $\mathcal{P}(\Omega)$.

   Dobbiamo trovare c tale che esista una probabilità $\mathbb{P}$ su $\mathcal{P}(\Omega)$ per cui valga $\mathbb{P}(\{x\}) = c^{-n}$ per ogni $x \in \omega_n$ ed $n \geq 2$. Sappiamo che essa esiste se e solo se:

   $$\begin{cases} c^{-n} \geq 0 & \forall n \geq 2 \\ 1 = \sum_{x \in \Omega} \mathbb{P}(x) = \sum_{n \geq 2} \sum_{x \in \Omega_n} \mathbb{P}(x) = \sum_{n \geq 2} k(k-1)^{n-2} c^{-n} & \end{cases}$$

Notiamo che la serie $\sum_{n=a}^{b} r^{-n} = (r^a - r^{b+1})/(1-r)$ per ogni $r \neq 1$ ed essa converge se e solo se $|r| < 1$. Bisogna quindi risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} c^{-n} \geq 0 & \forall n \geq 2 \\ 1 = \frac{k}{(k-1)^2} \frac{(k-1)^2/c^2}{1-(k-1)/c} \end{cases}$$

la cui soluzione è $c = k$. Quindi i pesi definiscono una probabilità su $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

2. Dobbiamo calcolare la probabilità dell'evento $A = \cup_{n \geq 7} \Omega_n$. Si ha evidentemente:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=7}^{\infty} \mathbb{P}(\Omega_n) = \sum_{n=7}^{\infty} 2 * 2^{-n} = 2^{-5} = \frac{1}{32}.$$

3. Dobbiamo calcolare la probabilità di $B = \cap_{n \geq 1} \omega_{2n}$. Si ha:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\omega_{2n}) = \sum_{n=1}^{\infty} 2 * 2^{-2k} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} = 2/3.$$

Soluzione esercizio 5.

Sia $U =$“la consegna è urgente”, $C =$“la consegna è in città”. L'insieme Ω delle possibili consegne è unione dei seguenti eventi, tra loro incompatibili:
$C \cap U$, con probabilità a;
$C^c \cap U$, con probabilità b;
$C \cap U^c$, con probabilità c;
$C^c \cap U^c$, con probabilità d.
So che $\mathbb{P}(\Omega) = a + b + c + d = 1$.
$i)$ implica che:

$$0.4 = \mathbb{P}(C^c) = \mathbb{P}(C^c \cap U) + \mathbb{P}(C^c \cap U^c) = b + d.$$

$ii)$ implica che:

$$0.3 = \mathbb{P}(U) = \mathbb{P}(C^c \cap U) + \mathbb{P}(C \cap U) = b + a.$$

$iii)$ implica che:

$$0.4 = \mathbb{P}(U^c \cap C) = c.$$

Si ricava allora

$$a = 0.2 \quad b = 0.1 \quad c = 0.4 \quad d = 0.3$$

Quindi la probabilità che sia una consegna urgente in città è

$$\mathbb{P}(U \cap C) = a = 0.2$$

e la probabilità che sia una consegna urgente fuori città è

$$\mathbb{P}(U \cap C^c) = b = 0.1$$

Soluzione esercizio 6.
Si ricordi che se $\{A_i\}_i$ sono tali che $\mathbb{P}(A_i \cup A_j) = 0$ allora $\mathbb{P}(\cap_i A_i) = \sum_i \mathbb{P}(A_i)$. Dalla uguaglianza $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cup B)$ si ha che

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1 \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \min(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)).$$

Se chiamiamo $W := A^c \cap B^c$ si ha che $\mathbb{P}(W) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) = 0.2$

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C \cap A) + \mathbb{P}(C \cap B) + \mathbb{P}(C \cap W).$$

Dalle ipotesi

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathbb{P}(C \cap A) &\leq \mathbb{P}(A) = 0.3 \\ \mathbb{P}(C \cap B) &\leq 0.3 \\ \mathbb{P}(C \cap W) &= \mathbb{P}(W) - \mathbb{P}(W \cap C^c) = \mathbb{P}(W) = 0.2. \end{aligned}$$

Da cui

$$0.2 \leq \mathbb{P}(C) \leq 0.8.$$

Nel caso in cui $C := W$ si ottiene l'uguaglianza con il minimo e se $C \supseteq B^c$ con $\mathbb{P}(C \cap B) = 0.3)$ si realizza l'estremo massimo.

Soluzione esercizio 7.
Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ lo spazio di probabilità a cui appartengono A e B, allora $A \cap B, A \cup B \in \mathcal{F}$. Sappiamo che :

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cup B) \tag{1}$$

Inoltre dalle ovvie relazioni: $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$, $A \supseteq A \cap B$ e $B \supseteq A \cap B$, deduciamo le seguenti diseguaglianze:

$$1 \geq \mathbb{P}(A \cup B) \geq \max\left(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\right) \tag{2}$$

e, tenendo presente anche la (1), otteniamo che:

$$\min\left(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\right) \geq \mathbb{P}(A \cap B) \geq \left(\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1\right). \tag{3}$$

Dalla disuguaglianza (2) otteniamo che:

$$1 \geq \mathbb{P}(A \cup B) \geq 0.7$$

Da cui si deduce che 1) è falsa; 2) può essere vera o falsa, in particolare è vera se e solo se $\mathbb{P}(A \setminus B) = 0$, pertanto, ad esempio, se $A \subseteq B$ allora $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.7$ mentre se $A = [0, 0.4]$, $B = [0.3, 1]$ e $\mathbb{P}$ è la misura di Lebesgue allora $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.1$; 3) è vera e la 4) è falsa.

Dalla disuguaglianza (3) otteniamo che:

$$0.4 \geq \mathbb{P}(A \cap B) \geq 0.1. \tag{4}$$

Non abbiamo altre informazioni che ci permettano di escludere ulteriori valori per $\mathbb{P}(A \cap B)$, quindi la 5) può essere vera o falsa (si ricordi che $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B)$), si veda anche il punto (2) per esempi e controesempi, in ogni caso se $A = [0, 0.4]$ e $B = [0.12, 0.82]$ allora $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.28$. Infine notiamo che $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A^c) + \mathbb{P}(B \cap A)$ allora utilizzando la disuguaglianza (4) si ha che:

$$0.7 = \mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(B \cap A^c) + 0.4$$

da cui otteniamo:

$$\mathbb{P}(B \cap A^c) \geq 0.3$$

quindi la 6) è vera. Infine la relazione $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(A \cap B)$ e la (4) implicano che:

$$0.4 = \mathbb{P}(A) \geq \mathbb{P}(A \cap B^c) + 0.1$$

da cui:

$$\mathbb{P}(A \cap B^c) \leq 0.3$$

perciò anche la 7) è vera.
Riassumendo abbiamo che

	V	F	VoF
1) $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.4$		X	
2) $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.7$			X
3) $\mathbb{P}(A \cup B) \geq 0.7$	X		
4) $\mathbb{P}(A \cup B) = 1.1$		X	
5) $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.28$			X
6) $\mathbb{P}(B \cap A^c) \geq 0.3$	X		
7) $\mathbb{P}(A \cap B^c) \leq 0.3$	X		

L'ultimo punto è lasciato come esercizio.

Soluzione esercizio 8.

1. Poniamo $B_1 = A_1$ e $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ per ogni $n \geq 2$, allora $B_n \in \mathcal{F}$ (per ogni $n \geq 1$) e $\cup_{n=1}^{+\infty} A_n = \cup_{n=1}^{+\infty} B_n \in \mathcal{F}$ con i B_n disgiunti a due a due.

   Dimostriamo che $\cup_{n=1}^{+\infty} A_n = \cup_{n=1}^{+\infty} B_n$.

   ($\supseteq$): per costruzione si ha che $A_n \supseteq B_n$, per ogni $n \geq 1$, quindi $\cup_{n=1}^{+\infty} A_n \supseteq \cup_{n=1}^{+\infty} B_n$.
   ($\subseteq$): per ogni $\omega \in \cup_{n=1}^{+\infty} A_n$ sia k il primo intero tale che $\omega \in A_k$, allora $\omega \in A_k \setminus A_{k-1} = B_k$ se $k > 1$, altrimenti, se $k = 1$, $\omega \in A_1 = B_1$. In ogni caso $\omega \in \cup_{n=1}^{+\infty} B_n$.

   Allo stesso modo si dimostra che $\cup_{n=1}^{k} B_n = A_k$.

   Quindi si ha:

$$\mathbb{P}(\cup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \mathbb{P}(\cup_{n=1}^{+\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \mathbb{P}(B_n) = \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(\cup_{n=1}^{k} B_n) = \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(A_k)$$

2. Poniamo $B_n = A_n^c$ per ogni $n \geq 1$ allora $B_n \in \mathcal{F}$ (per ogni $n \geq 1$) e $(\cap_{n=1}^{+\infty} A_n)^c = \cup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{F}$, allora grazie a quanto appena dimostrato, abbiamo che:

$$\mathbb{P}(\cap_{n=1}^{+\infty} A_n) = 1 - \mathbb{P}(\cup_{n=1}^{+\infty} B_n) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n) = \lim_{k\to\infty} (1 - \mathbb{P}(B_k)) = \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(A_k)$$

Soluzione esercizio 9.

Il punto più complesso della dimostrazione è mostrare che la seconda implicazione implica la prima. Sia $\{A_i\}_i$ una sequenza infinita (altrimenti non c'è nulla da dimostrare) di elementi disgiunti e sia $B_n := \cap_{i=0}^{n} A_i$ $(n \in \mathbb{N})$. Allora $\cup_{i=0}^{+\infty} A_i = \cup_{i=0}^{+\infty}$; se $\mathbb{P}(\cup_i B_i) = +\infty$ allora l'asserto è provato poichè $\mathbb{P}(\binom{B}{n}) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(A_i)$. Altrimenti sia $H_n := \cup_{i=n+1}^{+\infty} A_i \equiv \cup_{i\in\mathbb{N}} \setminus B_n$, in tal caso $\cap_{i\in\mathbb{N}} H_i = \emptyset$ pertanto

$$\sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i) - \mathbb{P}(H_n) \to \mathbb{P}(\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i) \qquad n \to +\infty.$$

Soluzione esercizio 10.

(1) $\Rightarrow$ (2). Se $\alpha = \sum_{i\in\mathbb{N}^*} p_i$ allora $A := \mathbb{N}^*$ risolve il problema. Sia $\alpha < \sum_{i\in\mathbb{N}^*} p_i$, allora definiamo $i_0 := 0$ e

$$i_1 := \min\{i > i_0 : p_i \leq \alpha\}, \quad \alpha_1 := \alpha - p_{i_1},$$

e iterativamente

$$i_{n+1} := \min\{i > i_n : p_i \leq \alpha\}, \quad \alpha_{n+1} := \alpha_n - p_{i_n}.$$

Sia $A := \cup_{j\in\mathbb{N}^*}\{i_j\}$, si ha

$$\sum_{i\in A} p_i = \lim_{n\to+\infty} \sum -j = 1^n p_{i_j} \leq \alpha.$$

Mostriamo che $\mathbb{N}^* \setminus A$ ha infiniti valori. Se, per assurdo, $j = \max(\mathbb{N}^* \setminus A)$ (che è non vuoto dal momento che $\alpha < \sum_{i\in\mathbb{N}^*} p_i$) allora $\alpha - \sum_{i\in A: i<j} p_i \geq \sum_{i>j} p_i \geq p_j$ pertanto, per costruzione $j \in A$ da cui l'assurdo.

Notiamo ora che per costruzione, se $j \in \mathbb{N}^* \setminus A$, allora $\alpha - \sum_{i\in A: i<j} p_i < p_j$, pertanto se $\{j_n\}$ è una successione in $\mathbb{N}^* \setminus A$ tale che $j_n \to +\infty$ allora

$$\alpha - \sum_{i\in A} p_i = \lim_{n\to+\infty} (\alpha - \sum_{i\in A: i<j_n} p_i) = 0.$$

(2) $\Rightarrow$ (1). Sia n tale che $p_n > \sum_{i>n} p_i$ e sia $\alpha \in \left(\sum_{i\neq n} p_i, \sum_{i=1}^{n} p_i\right) =: I$. Sia $A \subseteq \mathbb{N}^*$; se esiste $i \leq n$ tale che $i \notin A$ allora $\sum_{i\in A} p_i \leq \sum_{i\neq n} p_i$ (si ricordi

che la successione è non crescente) da cui $\sum_{i\in A} p_i \notin I$, se invece $i \in A$ per ogni $i \leq n$ allora $\sum_{i\in A} p_i \leq \sum_{i\geq n} p_i$ e quindi $\sum_{i\in A} p_i \notin I$.

L'esercizio si conclude utilizzando il fatto che gli eventi E_i sono disgiunti e che la σ-algebra generata da essi (e contenuta in $\mathcal{F}$) è data dagli insiemi del tipo $\cup_{i\in A} E_i$ (con $A \subseteq \mathbb{N}^*$) di probabilità $\mathbb{P}(\cup_{i\in A} E_i) = \sum_{i\in A} p_i$.

Osservazione. La richiesta $\{p_n\}$ non crescente non lede la generalità, infatti sotto la sola ipotesi $p_n > 0$, $\lim_{n\to+\infty} p_n = 0$ si ha che esiste una funzione biettiva $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ tale che $\{p_{\phi(n)}\}$ è non crescente (ed ovviamente vale ancora $\lim_{n\to+\infty} p_{\phi(n)} = 0$) e quindi ad essa si può applicare il teorema.

Inoltre si noti che, se p_n è una successione decrescente di numeri positivi convergenti a 0 tali che $p_n \leq 2p_{n+1}$ allora si applica il risultato precedente. In particolare si applica alla successione $\{1/2^n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$;

Soluzione esercizio 11.
rispondiamo ai quesiti a-b-c-d nell'ipotesi 1:
a) dobbiamo calcolare il numero di sequenze ordinate con ripetizione di 5 elementi scelti da un insieme di 10 oggetti distinguibili, che nel nostro caso sono le cifre $0-1-2-3-4-5-6-7-8-9$. Questo insieme corrisponde all'insieme delle disposizioni con ripetizione di ordine 5 di 10 oggetti distinti, che denotiamo con $D^*_{10,5}$. Utilizziamo il criterio del prodotto delle scelte successive per ottenere questo numero.
Criterio del prodotto delle scelte successive: Sia A un insieme che può essere individuato da n scelte successive. Supponiamo inoltre che la scelta i-esima possa essere effettuata in k_i modi, con $i : 1, \ldots, n$. Allora la cardinalità di A, che denotiamo con $|A|$ è:

$$|A| = \prod_{i=1}^{n} k_i. \tag{5}$$

Nel nostro caso possiamo individuare l'insieme con 5 scelte successive e ciascuna di esse, grazie al fatto che possiamo ripetere le cifre, può essere effettuata in 10 modi diversi. Otteniamo quindi $|D^*_{10,5}| = 10^5$.
In generale il numero di disposizioni con ripetizione di ordine k di n oggetti distinguibili sarà quindi $|D^*_{n,k}| = n^k$. (Stiamo supponendo che anche il numero 00000 sia ammissibile). Nelle disposizioni con ripetizione si tiene conto dell'ordine ($30506 \neq 30650$).
b) Cominciamo a scegliere la posizione dell'unico 3: abbiamo 5 possibili scelte. Una volta posizionato il 3, abbiamo 4 posizioni "libere", e per ciascuna abbiamo 9 possibili scelte, perchè non possiamo più scegliere il 3, in tutto sono $|D^*_{9,4}| = 9^4$. Quindi il numero dei numeri telefonici che contengono un solo 3 è pari a $5 * 9^4$.
c) I numeri pari sono $0-2-4-6-8$, quindi in questo caso il numero di numeri telefonici è pari al numero di disposizioni con ripetizione di ordine 5 di 5 oggetti: $|D^*_{5,5}| = 5^5$.
d) qui abbiamo una scelta obbligata, il 3 deve essere in prima posizione, restano poi 4 posizioni "libere": il numero dei numeri telefonici che cominciano con il 3

è pari a $|D^*_{10,4}| = 10^4$.
Rispondiamo ai medesimi questiti sotto l'ipotesi 2:
a) dobbiamo calcolare il numero di sequenze ordinate senza ripetizione di 5 numeri scelti da 10, ovvero le disposizioni senza ripetizione di ordine 5 di 10 elementi che denotiamo con $D_{10,5}$. Si ha che $|D_{10,5}| = 10*9*8*7*6$. In generale il numero di disposizioni senza ripetizione di ordine k di n elementi, insieme che denotiamo con $D_{n,k}$, è pari a $|D_{n,k}| = n*(n-1)*(n-2)*\cdots*(n-k+1)$. Un modo per convincersi di questo consiste nell'applicare il criterio del prodotto delle scelte successive anche a questa situazione, tenendo presente che le cifre non possono essere ripetute e quindi ad ogni passaggio si ha una possibilità in meno di effettuare la scelta successiva.
b) abbiamo come nel caso precedente 5 scelte per posizionare il 3, le altre 4 posizioni libere danno luogo a $|D_{9,4}|$ possibili scelte. In tutto abbiamo $5*9*8*7*6$ numeri telefonici che contengono un solo 3.
c) le cifre pari sono sempre $0-2-4-6-8$ quindi avremo $|D_{5,5}| = 5*4*3*2*1 \doteq 5!$ possibili scelte. Un elemento di $D_{n,n}$ è detto una permutazione di n elementi e $|D_{n,n}| = n!$.
d) Abbiamo $1*|D_{9,4}| = 9*8*7*6$ scelte possibili.
Calcoliamo adesso la probabilità di $A = \{$ Un numero di telefono contiene un solo 3 $\}$.
Nell'ipotesi 1 Ω è costituito da tutte le possibili sequenze (ordinate) con ripetizione di cinque elementi distinti scelti da un insieme di 10 elementi distinti (i.e. $D^*_{10,5}$) e la probabilità è quella uniforme, quindi abbiamo che:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5*9^4}{10^5}.$$

Nell' ipotesi 2 lo spazio di probabilità Ω è costituito da tutte le possibili possibili sequenze (ordinate) senza ripetizione di cinque elementi distinti scelti da un insieme di 10 elementi distinti (i.e. $D_{10,5}$), anche in questo caso la probabilità è quella uniforme, quindi abbiamo che:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5*9*8*7*6}{10*9*8*7*6} = \frac{1}{2}.$$

Soluzione esercizio 12.
Modello di riferimento: estrazione senza rimpiazzo (viene estratta una pallina alla volta) di 10 palline numerate.
Intuitivamente si può rispondere che ogni tentativo ha la stessa probabilitá a di andare a buon fine e quindi la probabilitá a di aprire la porta al quinto tentativo è $\frac{1}{10}$.
Conviciamoci di avere avuto l'intuizione corretta: per semplificare le cose possiamo pensare che le chiavi siano numerate e che la quinta sia effettivamente quella che apre la cantina. Allora i casi possibili sono rappresentabili nel seguente modo: $\{(a_1,\ldots,a_{10}) : a_i \neq a_j \forall i \neq j, a_i = 1,\ldots,10\}$ dove a_i = numero della chiave provata da Giulio all' i esimo tentativo : abbiamo appena descritto $D_{10,10}$. I casi favorevoli sono $\{(a_1,,a_4,5,a_6\ldots,a_{10}) : a_i \neq a_j \forall i \neq j, a_i =$

$1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$, ovvero $D_{9,9}$.
Quindi $\mathbb{P}(\text{Giulio apre la porta al quinto tentativo}) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{|D_{9,9}|}{|D_{10,10}|} = \frac{1}{10}$.

Soluzione esercizio 13.
Se l'estrazione del numero i avesse probabilità p_i e se definiamo l'evento

$$A := \text{“almeno due estrazioni sono uguali”}$$

si ha, in uno spazio campionario opportuno (la cui esistenza è garantita da un teorema che prende il nome di *Teorema di Kolmogorov*)

$$\mathbb{P}(A^c) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \geq n \\ \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} k! p_{i_1} \cdots p_{i_k} & \text{se } k < n. \end{cases}$$

Nel caso più semplice in cui $p_1 = \cdots = p_k = 1/n$ si ha

$$\mathbb{P}(A^c) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \geq n \\ \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k} & \text{se } k < n. \end{cases}$$

Nel caso $n = 365$

k	$\mathbb{P}(A)$
5	0.027
10	0.1169
20	0.4114
30	0.7063
40	0.8912
50	0.9703
60	0.9941
70	0.9992
100	0.9999997.

Osservazione: si potrebbe dimostrare (utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange) che, fissato n, il minimo valore di $\mathbb{P}(A)$ lo si ha in corrispondenza a $p_1 = \cdots = p_n = 1/n$.

Soluzione esercizio 14.
1. In questo caso l'ordine in cui il giocatore riceve le carte è ininfluente quindi, lo spazio di probabilità Ω sarà costituito da tutti i possibili sottoinsiemi NON ORDINATI e distinti di 13 elementi individuabili da un insieme di 52 elementi distinguibili, ovvero le combinazioni senza ripetizioni di ordine 13 di 52 elementi (denoteremo questo insieme con il simbolo $C_{52,13}$). Per insiemi distinti intenderemo quindi insiemi che differiscono per almeno un elemento. La σ-algebra

sarà l'insieme di tutte le parti di Ω e su di essa assegneremo la probabilitá a uniforme. Dobbiamo calcolare la cardinalità di Ω, abbiamo che:

$$|C_{52,13}| = \binom{52}{13} \doteq \frac{52!}{(52-13)!13!}.$$

In generale il numero di combinazioni senza ripetizioni di ordine k di n elementi distinti è

$$|C_{n,k}| = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

2. Poniamo $A_k = \{$ "Il giocatore riceve k assi "$\}$ con $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Individuiamo la cardinalità di A_k tramite il solito criterio del prodotto delle scelte, sarà:

$$|A_k| = \binom{4}{k} * \binom{52-4}{13-k}$$

Infatti ho $\binom{4}{k}$ modi possibili per scegliere k assi e poi $\binom{52-4}{13-k}$ modi possibili per scegliere le restanti $13 - k$ carte.
Abbiamo che

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{|A_k|}{|\Omega|} = \frac{\binom{4}{k} * \binom{52-4}{13-k}}{\binom{52}{13}}$$

Quindi se poniamo $B = \{$ " Il giocatore riceve almeno 2 assi" $\}$ esso è uguale a $\cup_{k=2}^{4} A_k$ e la sua probabilità sarà:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\cup_{k=2}^{4} A_k) = \sum_{k=2}^{4} \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=2}^{4} \frac{\binom{4}{k} * \binom{52-4}{13-k}}{\binom{52}{13}} \simeq 0.2573$$

il secondo passaggio è garantito dal fatto che gli eventi A_k si escludono a vicenda.
3. Sia $A = \{$"Il giocatore riceve 13 carte dello stesso seme"$\}$, la cardinalità di A è individuata dalla sola scelta del seme che può essere effettuata in 4 modi, perciò: $\mathbb{P}(A) = \frac{4}{\binom{52}{13}}$.
4.Sia $A = \{$"Il giocatore riceve 13 carte di cui 5 fiori, 4 cuori, 3 picche e 1 quadri"$\}$. Calcolo con il solito criterio la cardinalità di A, $|A|$:

1. scelgo le cinque carte fiori: ho $\binom{13}{5}$ possibilità

2. scelgo le quattro carte cuori: ho $\binom{13}{4}$ possibilità

3. scelgo le tre carte picche: ho $\binom{13}{3}$ possibilità

4. scelgo la carta quadri: ho $\binom{13}{1} = 13$ possibilità

Quindi $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{13}{5}*\binom{13}{4}*\binom{13}{3}*13}{\binom{52}{13}}$.

5. In questo caso lo spazio campionario Ω è costituito da tutte le possibili sequenze ordinate senza ripetizione di 2 elementi distinti scelti da 52 distinti, i.e. $\Omega = D_{2,52}$. Sia $B =$"il giocatore estrae la prima carta di picche e la seconda di fiori". Individuiamo la cardinalità di B tramite il solito criterio: 13 possibili scelte per la carta di picche e 13 possibili scelte per quella di fiori. Da cui:

$$\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{(13)^2}{52 * 51}.$$

Soluzione esercizio 15.

[R. $\binom{x+y}{x}$]

Soluzione esercizio 16.

Ci sono $\binom{52}{26}(= |C_{52,26}|)$ modi di scegliere 26 carte tra 52, quindi $\binom{52}{26}$ modi di dividere il mazzo (*casi possibili*). Ci sono esattamente 26 carte rosse tra le 52 carte; se ognuna delle due parti del mazzo deve contenere carte rosse e nere in egual numero, ognuna dovrà contenere 13 carte rosse. Scelgo quindi le 13 carte rosse di una prima metá a in $\binom{26}{13}$ modi e le rimanenti 13 carte tra le 26 nere in $\binom{26}{13}$ modi. Dunque

$$\mathbb{P}(\text{ciascuna parte contiene carte rosse in egual numero}) = \frac{\binom{26}{13}\binom{26}{13}}{\binom{52}{26}} \simeq 0.2181.$$

Soluzione esercizio 17.

La probabilità di avere almeno un successo in una serie di n prove di Bernoulli indipendenti è $1-(1-p)^n$, da cui

$$1-(1-p)^n \geq \alpha \Longleftrightarrow n \geq \ ]\log_{1-p}(1-\alpha)[\ = \left]\frac{\log(1-\alpha)}{\log(1-p)}\right[$$

dove $]\beta[:= \min n \in \mathbb{Z} : n \geq \beta$. In questo caso si ha $n \geq]3.81018[= 4$.

Soluzione esercizio 18.

Se abbiamo un insieme al più numerabile X e definiamo le matrici (in generale infinite) P e Q di elementi p_{ij} e q_{ij} con $i, j \in X$ nel seguente modo

$$p_{ij} := \mathbb{P}(\text{“passare da } i \text{ a } j \text{ in un passo})$$
$$q_{ij} := \begin{cases} 1 & p_{ij} > 0 \\ 2 & p_{ij} = 0 \end{cases}$$

allora le matrici P^n e Q^n ci forniscono rispettivamente la probabilità ed il numero di cammini distinti da un punto ad un altro in n passi.

Nel nostro caso $X := \{1,2,3,4\}$ (le corsie) e

$$P := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad Q := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pertanto

$$P^4 := \begin{pmatrix} 3/8 & 0 & 5/8 & 0 \\ 0 & 11/16 & 0 & 5/16 \\ 5/16 & 0 & 11/16 & 0 \\ 0 & 5/8 & 0 & 3/8 \end{pmatrix} \quad Q^4 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

da cui ricaviamo i valori sulla diagonale (che sono quelli richiesti dal problema)

$$p = \begin{pmatrix} 3/8 \\ 11/16 \\ 11/16 \\ 3/8 \end{pmatrix} \quad m := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Soluzione esercizio 19.
Poniamo $\{S\} = \{$ Mi muovo di un passo verso l'alto$\}$ e
$\{D\} = \{$ Mi muovo di un passo verso destra$\}$. Dobbiamo determinare in numero di sequenze distinguibili che si possono formare con tutti gli elementi dell' insieme $\{S, S, D, D, D\}$. Notiamo innanzitutto che una volta scelta la posizione degli S abbiamo anche fissato la posizione dei D, quindi una qualsiasi sequenza è univocamente individuata dalla scelta degli S che può essere effettuata in $\binom{5}{2} = \frac{5!}{3!2!}$ modi (essendo gli S indistinguibili fra di loro non mi interessa in quale ordine vengono scelti).

Soluzione esercizio 21.
Ovviamente affinchè il problema abbia senso avremo $\sum_{i=1}^k m_i = M$. Il numero totale di sottoinsiemi di cardinalità M di un insieme di cardinalità N è $\binom{N}{M}$ (numero totale di scelte). Parimenti il numero di sottoinsiemi di cardinalità m_i di un sottoinsieme di cardinalità n_i è $\binom{n_i}{m_i}$ pertanto il numero di scelte favorevoli sarà

$$\prod_{i=1}^k \binom{n_i}{m_i}.$$

La probabilità cercata è

$$p = \frac{\prod_{i=1}^k \binom{n_i}{m_i}}{\binom{N}{M}}.$$

Soluzione esercizio 22.
Dividiamo le domande in due popolazioni: quelle con risposte in comune (di

cardinalità M) e quello delle restanti (di cardinalità $N-M$). Il problema può essere così riformulato: pescando a caso n elementi, qualè la probabilità che j_1 appartengano al primo gruppo? Poichè ogni domanda appartenente al secondo gruppo alla quale Alberto non abbia dato risposta corretta è automaticamente una domanda cui Bruno ha risposto in maniera corretta, allora il numero j di risposte corrette di Bruno (in funzione di j_1 è $j = j_1 + (N - M - (n - j_1)) = 2j_1 + N - M - n$. Le condizioni su $j_1 \in \mathbb{N}$ sono

$$0 \le j_1 \le M, \qquad 0 \le n - j_1 \le N - M$$

o, equivalentemente,

$$\max(0, n + M - N) \le j_1 \le \min(M, n)$$

che, in termini di j si traducono in,

$$|N - M - n| \le j \le N - |n - M|$$

j e $N = M - n$ con la stessa parità.

Pertanto i valori possibili per j sono $j \in \{|N-n-M|, |N-n-M|+2, \ldots, N-|N-m|\}$. Se chiamiamo p_j la probabilità che Bruno abbia risposto correttamente a j domande allora, dall'esercizio precedente,

$$\begin{aligned} p_j =& \frac{\binom{M}{j_1}\binom{N-M}{N-M-n+j_1}}{\binom{N}{M}} = \frac{\binom{M}{(j-N+M+n)/2}\binom{N-M}{N+j-M-n}}{\binom{N}{M}} \\ =& \frac{\binom{n}{(n+N-j-M)/2}\binom{N-n}{(N-n+j-M)/2}}{\binom{N}{N}}. \end{aligned}$$

Nel caso specifico $N = 10$, $n = 8$, $M = 6$ abbiamo $j \in \{4, 6, 8\}$ e

j	4	6	8
p_j	$\frac{\binom{8}{4}\binom{2}{0}}{\binom{10}{6}} = \frac{1}{3}$	$\frac{\binom{8}{3}\binom{2}{1}}{\binom{10}{6}} = \frac{56}{105}$	$\frac{\binom{8}{2}\binom{2}{2}}{\binom{10}{6}} = \frac{2}{15}$.

Mentre nel caso $N = 10$, $n = 8$, $M = 6$ abbiamo $j \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ e

j	p_j
0	$\dfrac{\binom{4}{4}\binom{6}{0}}{\binom{10}{6}} = \dfrac{1}{210}$
2	$\dfrac{\binom{4}{3}\binom{6}{1}}{\binom{10}{6}} = \dfrac{12}{105}$
4	$\dfrac{\binom{4}{2}\binom{6}{2}}{\binom{10}{6}} = \dfrac{3}{7}$
6	$\dfrac{\binom{4}{1}\binom{6}{3}}{\binom{10}{6}} = \dfrac{8}{21}$
8	$\dfrac{\binom{4}{0}\binom{6}{4}}{\binom{10}{6}} = \dfrac{1}{14}.$

Soluzione esercizio 23.

1. Sia $\alpha = 1$ e sia Y_0 il separante di Y. Si definisca $\mathcal{A}_\epsilon := \cup_{z\in Y_0}\{B(z,\epsilon)\}$; questa è una copertura al più numerabile di Ω per ogni $\epsilon > 0$. Pertanto, se $\mathbb{P}_X(\cdot) := \mathbb{P}(X^{-1}(\cdot))$ è la legge di X, esiste $z_\epsilon \in Y_0$ tale che $\mathbb{P}_X(B(z_\epsilon,\epsilon)) > 0$ che implica $\mathbb{P}_X(B(z_\epsilon,\epsilon)) = 1$. Ricordando che $\mathbb{P}(A) = 1$ se e solo se per ogni evento B si ha $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(B)$, allora, per induzione su n,
$$\mathbb{P}_X(A_n) = 1 \text{ dove } A_n := \cap_{i=1}^n B(z_{1/i}, 1/i).$$
Allora se $A \cap_{i=1}^{+\infty} A_n \equiv \cap_{i=1}^{+\infty} B(z_{1/i}, 1/i)$ si ha $\mathbb{P}_X(A) = 1 > 0$ quindi $A \neq \emptyset$; inoltre se $\operatorname{diam}(A) := \sup_{x,y\in A} d(x,y)$ si ha $\operatorname{diam}(A) = 0$ che equivale all'esistenza di $y \in Y$ tale che $A = \{y\}$.

2. Se $Y_1 := \{z \in Y : \forall\epsilon > 0 \mathbb{P}_X(B(z,\epsilon)) > 0\}$ notiamo subito che, per ogni $z \in Y\backslash Y_1$ esiste $h \in Y_0\backslash Y_1$ ed $r > 0$ tale che $z \in B(h,r)$ e $\mathbb{P}_X(B(h,r)) = 0$. Per dimostrarlo, si prenda $\epsilon > 0$ tale che $\mathbb{P}_X(B(z,\epsilon)) = 0$ e siano $r = \epsilon/2$ e $h \in Y_0 \cap B(z,r)$. Allora $B(h,r) \subseteq B(z,\epsilon)$ pertanto $\mathbb{P}_X(B(h,r)) = 0$.

   Se definiamo $r_z := \sup\{r > 0 : \mathbb{P}_X(B(z,r)) = 0)\} \equiv \max\{r > 0 : \mathbb{P}_X(B(z,r)) = 0)\}$ per ogni $z \in Y \setminus Y_0$, allora
$$\cup_{z\in Y_0\backslash Y_1} B(z, r_z) = Y \setminus Y_1.$$
   Poichè $\mathbb{P}_X(\cup_{z\in Y_0\backslash Y_1} B(z,r_z)) \leq \sum_{z\in Y_0\backslash Y_1} \mathbb{P}_X(B(z,r_z)) = 0$ allora $\mathbb{P}_X(Y_1) = 1$. Quindi Y_1 è non vuoto e se $z \in Y_1$ si ha $\mathbb{P}_X(\{z\}) = \lim_{r\to 0^+} \mathbb{P}_X(B(z,r)) \geq \alpha > 0$, quindi essendo $1 \geq \sum_{z\in Y_1} \mathbb{P}_X(\{z\})$ si ha che $\operatorname{card}(Y_1) \leq [1/\alpha]$.