3 Esercitazione 3: / /

3.1 Probabilità uniforme e formula di Poincaré (inclusione-esclusione)

Esercizio 1 ** *[Principio di inclusione-esclusione] Sia μ una misura (basta sia semplicemente additiva) su (Ω, Σ_Ω) e sia $\{A_i\}_{i=1}^n$ una collezione finita di eventi di misura finita. Mostrare che*

$$\mu(\cup_{i=1}^k A_i) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_j \le n} \mu(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_j}).$$

Esercizio 2 *[matching problem] In un programma televisivo della domenica, uno dei giochi proposti è il seguente: sono fornite n fotografie che ritraggono n personaggi famosi da adulti ed altrettante che li ritraggono da bambini. Un concorrente totalizza k punti se per k personaggi associa correttamente le due fotografie di questi da adulti e da piccoli.*

1. *Qual è la probabilità che il concorrente scegliendo a caso totalizzi almeno un punto?*

2* *Si calcoli la probabilità di associare correttamente due fotografie.*

3** *Si calcoli la probabilità di associare correttamente k fotografie.*

Esercizio 3 *L'album di figurine Panini contiene r figurine di calciatori diversi, supponiamo che la figurina di ciascun giocatore fra gli r disponibili abbia uguale probabilità di essere scelta per ogni pacchetto (che contiene una sola figurina) in modo indipendente. Si determini la probabilità di completare la collezione comprando un numero $n \ge r$ di pacchetti.*

Esercizio 4 * *Sono estratti senza reimmissione k numeri da $\{1, \dots, N\}$. Sia $A \subseteq \{1, \dots, N\}$ di cardinalità n, qual è la probabilità che siano stati estratti tutti i numeri in A? Ripetere il quesito nel caso in cui l'estrazione ammetta reimmissione.*

Esercizio 5 *Sia $n > 1$ un numero naturale. Sia K un naturale scelto a caso e compreso tra 1 ed n. Calcolate la probabilità che K divida n.*

Esercizio 6

1. * *Si consideri un mazzo di 40 carte (4 semi, 10 carte per seme), conveniamo di numerare le carte di ciascun seme da 1 a 10. Una volta mischiato il mazzo si girano le carte ad una ad una contando* $1, 2, \ldots, 10, 1, 2 \ldots$ *Il gioco termina in maniera vincente se esce una carta corrispondente al numero nominato (indipendentemente dal seme). Calcolare le probabilità di vittoria.*

2. ** *Generalizziamo il problema nella maniera seguente: si consideri una partizione* $\{A_i\}_{i=1}^k$ *di un insieme* X *di cardinalità* N *(si pensi pure al caso particolare* $X = \{1, 2, \ldots, N\}$*). Conveniamo di definire* $|F| := \mathrm{card}(F)$ *e sia* $J : X \to \{1, 2, \ldots, k\}$ *la funzione definita da* $J(x) = i$ *se e solo se* $x \in A_i$*. Definite le cardinalità degli elementi della partizione* $n_i := |A_i|$*, se* $H := \{f \in X^X : f \text{ biettiva}\}$ *è l'insieme delle permutazioni da* X *in* X *e se* $S := \{f \in H : \forall x \in X : J(x) \neq J(f(x))\}$ *allora si provi che*

$$|S| = \sum_{R_1 \subseteq A_1, \ldots, R_k \subset A_k} (-1)^{\sum_{i=1}^k |R_i|} (N - \sum_{i=1}^k |R_i|)! \prod_{i=1}^k \frac{n_i!}{(n - |R_i|)!}$$
$$\equiv \sum_{0 \leq r_1 \leq n_1, \ldots, 0 \leq r_k \leq n_k} (-1)^{\sum_{i=1}^k r_i} (N - \sum_{i=1}^k r_i)! \prod_{i=1}^k \binom{n_i}{r_i}^2 \prod_{i=1}^k r_i!.$$

3.2 Probabilità condizionata, Teorema delle probabilità totali, Teorema di Bayes e regola moltiplicativa

Esercizio 7 *Sia* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *uno spazio di probabilità e* B *un evento in* $\mathcal{F}$ *di probabilità positiva. È Facile mostrare che* $\mathbb{P}_B(\cdot) := \mathbb{P}(\cdot|B)$ *definisce una misura di probabilità. Sia ora* $\{B_n\}$ *una successione (finita o infinita) di eventi tali che* $\mathbb{P}(\cap_{i=1}^n B_i) > 0$ *di misura positiva e sia, per induzione,* $\mathbb{P}_n(\cdot) := \mathbb{P}_{n-1}(\cdot|B_n)$ *(dove* $\mathbb{P}_0 := \mathbb{P}$*). Si mostri che*

$$\mathbb{P}_n(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot| \bigcap_{i=1}^n B_i).$$

Mostrare inoltre che

$$\mathbb{P}(A \cap \bigcap_{i=1}^n B_i) = \mathbb{P}(A| \bigcap_{i=1}^n B_i) \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(B_{i+1}| \bigcap_{j=1}^i B_j) \mathbb{P}(B_1).$$

Esercizio 8 *Sia* $k, n \in \mathbb{N}$ *tali che* $k > n \geq 1$ *e* $\{A_i\}_{i=1}^k$ *una successione di* *eventi tali che* $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{k-1} A_i) > 0$. *Mostrare che*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=n+1}^{k} A_i \middle| \bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \prod_{r=n+1}^{k} \mathbb{P}\left(A_r \middle| \bigcup_{j=1}^{r-1} A_j\right)$$

$$= \frac{\prod_{r=2}^{k} \mathbb{P}\left(A_r \middle| \bigcup_{j=1}^{r-1} A_j\right)}{\prod_{r=2}^{n} \mathbb{P}\left(A_r \middle| \bigcup_{j=1}^{r-1} A_j\right)} = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=2}^{k} A_i \middle| A_1\right)}{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=2}^{n} A_i \middle| A_1\right)}$$

Esercizio 9 *Supponiamo che un' urna contenga* 1 *pallina rossa e* 1 *pallina bianca. Una pallina è estratta e se ne guarda il colore. Essa viene poi rimessa nell'urna insieme a* 1 *pallina dello stesso colore.*
Sia R_i *l'evento* $\{$*All' i- esima estrazione viene estratta una pallina rossa*$\}$, *analogamente* B_i *sia l'evento* $\{$*All' i- esima estrazione viene estratta una pallina bianca*$\}$.
Si calcoli:

1. $\mathbb{P}(R_2)$ *e* $\mathbb{P}(R_3)$,

2. *sapendo che la seconda estratta è una pallina rossa, è più probabile che la prima pallina estratta sia stata rossa o che sia stata bianca?*

3* *provare che* $\mathbb{P}(R_n) = \frac{1}{2}$ *per ogni* $n \geq 1$.

Esercizio 10 *In un gioco televisivo viene messo in palio un 1 milione di euro. Per vincerlo il concorrente dovrà indovinare fra tre buste qual è quella che contiene l'assegno. Il concorrente sceglie a caso una busta; a questo punto il conduttore mostra una delle due buste che sa essere vuota, offrendo al concorrente di cambiare la propria busta con quella rimanente.*
Qual è la probabilità di vincere il premio conservando la prima busta scelta?
Qual è la probabilità di vincere cambiando la busta?
Qual è la probabilità di vincere se gioca a testa e croce fra le due strategie?

Esercizio 11 *10 urne contengono* 4 *palline rosse(R) ed un numero variabile di palline bianche(B). L'urna i-esima contiene* 4 *palline R ed i palline B. Ogni urna ha la stessa probabilità di essere scelta. Dall'urna scelta vengono estratte* 2 *palline.*

1. *Qual è la probabilità che le due palline siano di colore diverso ?*

2. *Supponiamo che l'estrazione abbia come risultato due palline di colore diverso: qual è la probabilità* p_i *che l'urna prescelta sia la i esima? Qual è l'urna più probabile?*

Esercizio 12 *Qual è la probabilità di estrarre tre carte di picche da un mazzo di 52 carte?*

Esercizio 13 *Un signore ha due figli e supponiamo che il sesso di ciascuno dei sue sia indipendente da quello dell'altro e che la probabilità che nasca un maschio sia pari ad* $1/2$.

1. *Ci dice di avere almenu un maschio, qual è la probabilità di avere due maschi?*
2. *Lo incontriamo in giro con uno dei suoi figli e vediamo che è un maschio, qual è la probabilità che entrambi siano maschi?*

3.3 Esercizi proposti

Esercizio 14 *Gli animali di una determinata specie sono divisi a seconda del colore del pelo nel modo seguente:*

- 20% *colore chiaro unito*
- 40% *colore scuro unito*
- 40% *colore chiazzato*

Il carattere "coda lunga" è presente nel 10% *di animali di colore chiaro unito, nel* 35% *di quelli chiazzati e nel* 90% *di quelli di colore scuro unito.*

1. *Determinare la percentuale di animali con la coda corta.*
2. *Determinare la probabilità di avere un animale dal pelo chiazzato sapendo che NON ha la coda corta.*
3. *Determinare la probabilità di avere un animale dal pelo chiazzato sapendo che ha la coda corta.*

Esercizio 15 *Sia* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *uno spazio di probabilità e siano* $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ *due eventi con* $\mathbb{P}(A_1) > 0$, *mostrare che:*

$$\mathbb{P}(A_2|A_1) \geq 1 - \frac{\mathbb{P}(A_2^c)}{\mathbb{P}(A_1)}$$

Esercizio 16 *Cinque biglietti di una lotteria sono rimasti invenduti. Fra questi c'è il biglietto vincente. Due amici A e B decidono di comprarne uno a testa. A sceglie per primo il biglietto.*

1. *Qual è la probabilità che A acquisti il biglietto vincente?*
2. *Qual è la probabilità che B acquisti il biglietto vincente?*

3. *Qual è la probabilità che B acquisti il biglietto vincente, se non è stato acquistato da A?*

4. *Qual è la probabilità che uno dei due vinca?*

Esercizio 17 *Il signor Bianchi da Roma e il signor Rossi da Milano decidono di incontrarsi a Roma. All'ultimo momento, Rossi, che è un tipo molto indeciso, rimette al caso la decisione di partire, lanciando una moneta equilibrata. In caso di partenza, per decidere quale dei 6 treni a sua disposizione prendere, lancia un dado. Se Bianchi va in stazione e osserva che Rossi non è su nessuno dei primi 5 treni, qual è la probabilità che Rossi arrivi con l'ultimo treno?*

Esercizio 18 *In un impianto industriale, si sa che la probabilità che un nuovo operaio raggiunga la quota di produzione, se ha frequentato il corso di addestramento, è* 0.86*. La probabilità che un nuovo operaio raggiunga la quota di produzione, se non ha frequentato il corso è* 0.35*. L'*80% *dei nuovi operai frequentato il corso.*

(a) *Qual è la probabilità che un nuovo operaio raggiunga la quota di produzione?*

(b) *Trovare la probabilità che un nuovo lavoratore che raggiunge la quota di produzione abbia sostenuto l'addestramento.*

Esercizio 19 *Una popolazione nordeuropea ha un'incidenza di AIDS pari allo* 0.05%*. Si utilizza un test che su una persona ammalata è positivo con una probabilità di* 0.999*, mentre su una persona sana risulta positivo con probabilità* 0.002*.*

1. *Qual è la probabilità che un individuo con test positivo sia effettivamente affetto da AIDS?*

2. *Qual è la probabilità che un individuo con test negativo non sia affetto da AIDS?*

3. *Qual è la probabilità che il test dica la verità?*

Esercizio 20 * *Un concorrente deve scegliere tra $n \geq 2$ buste, ciascuna contenente una somma differente di denaro (scelta tra gli importi $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ che sono ignoti al concorrente); la scelta avviene nel seguente modo: dopo averle mischiate, il presentatore apre la prima busta e legge l'importo, il concorrente può tenere quella oppure passare alla successiva, sapendo che quelle non accettate sono perse. Il concorrente deciderà quando arrestare l' apertura delle buste, tenendo l'ultima aperta. Nel caso vengano aperte tutte, il concorrente sarà obbligato ad accettare l'ultima che è stata aperta.*

Il concorrente decide di adottare la seguente strategia: scelto un numero $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, fa aprire la prima busta e si annota l'importo, dopodiché continua a far aprire le buste fino a che non escano "i" valori superiori all'importo *annotato oppure fintantoché tutte le buste siano state aperte; in ogni caso accetterà, ovviamente, l'ultima busta aperta. Ad esempio se scegliesse $i = 0$ accetterebbe la prima busta aperta, mentre scegliendo $i = 1$ accetterebbe la prima busta il cui importo superi quello della prima aperta.*

1. *Qual è la probabilità di accettare la busta contenente l' importo x_j (al variare di i)?*
2. *Qual è la scelta di i che massimizza la preobabilità di accettare l'importo più elevato?*

Esercizio 21 * *Sia I un insieme al più numerabile e N una variabile aleatoria a valori in I. Sia $\{C_i\}_{i\in I}$ una collezione di variabili aleatorie reali indipendente da N. Sia $C_N(\omega) := C_{N(\omega)}(\omega)$ per ogni $\omega \in \omega$.*

1. *Si mostri che C_N è una variabile aleatoria.*
2. *Calcolare $\mathbb{P}(C_N \in A)$ in dipendenza da $\{C_i\}_{i\in I}$ e N.*
3. *Supponendo le variabili $\{C_i\}_{i\in I}$ e N integrabili e supponendo altresì $\sum_{i\in I} \mathbb{E}[|C_i|] < +\infty$ si mostri che anche C_N è integrabile e si calcoli $\mathbb{E}[C_N]$.*

4^*. *Si calcoli $\mathbb{P}(C_N = j_0)$ nel caso in cui $I = \mathbb{N}^*$ e*

$$\mathbb{P}(N = i) = p(1-p)^{i-1}, \qquad \forall i \in \mathbb{N}^* \quad (p \in (0,1))$$
$$\mathbb{P}(C_i = j) = \begin{cases} \frac{1}{i} & \forall j \in \mathbb{N}^*, j \le i \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases} \forall i \in \mathbb{N}^*.$$

Esercizio 22 * *Sia I un insieme al più numerabile e si estragga un valore casuale di legge $\{p_i\}_{i\in I}$. Si decide di pagare $c \cdot q_i$ a chiunque abbia scommesso c sull'uscita del valore i. Supponendo che il volume delle scommesse sia indipendente dall'estrazione, si caolcolino i valori $\{q_i\}_{i\in I}$ affinché il valore atteso del guadagno per gli organizzatori sia comunque positivo.*

SOLUZIONI

Soluzione esercizio 1.

Basta mostrare l'asserto per una misura finita (altrimenti si ambienta il problema nello spazio $\cup_{i=1}^n A_i$). Per induzione su n; se $n = 1$ segue dall'additività. Sia vera per n, mostriamo, equivalentemente, che

$$\mu(\cap_{i=1}^{n+1} A_i^c) = \mu(\Omega) - \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j+1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_j \le n+1} \mu(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_j}).$$

Sia $\mu_1(\cdot) := \mu(\cdot \cap A_{n+1}^c)$ allora evidentemente $\mu_1(A) = \mu(A) - \mu(A \cap A_{n+1})$, pertanto

$$\begin{aligned}
\mu(\cap_{i=1}^{n+1} A_i^c) &= \mu_1(\cap_{i=1}^{n} A_i^c) = \mu_1(\Omega) - \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_j\le n} \mu_1(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_j}) \\
&= \mu(\Omega) - \mu(A_{n+1}) \\
-\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1} &\sum_{1\le i_1<\cdots<i_j\le n} (\mu(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_n}) - \mu(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_j}\cap A_{n+1})) \\
&= \mu(\Omega) - \sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{j+1} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_j\le n+1} \mu(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_j}).
\end{aligned}$$

Soluzione esercizio 2.

1. Indicati con $\pi = (\pi(1), \dots, \pi(n))$ una permutazione di $(1, \dots, n)$ e con Π l'insieme di tutte le permutazioni di $(1, \dots, n)$, all'esperimento consistente nell'accoppiare le fotografie corrisponde lo spazio campionario $\Omega = \Pi$. L'idea è che possiamo sempre immaginare che il concorrente disponga in due file distinte le fotografie dei personaggi da adulti e quelle da bambini, così che ciascuna di esse è rappresentata dal rango (posto) che occupa nella corrispondente riga. Vale che $|\Omega| = n!$. Chiamiamo $\pi_0 \in \Pi$ la soluzione al gioco che associa correttamente tutte le fotografie, possiamo supporre che sia l'applicazione identica senza ledere in generalità. Quindi, l'evento $A_i = \{\pi \in \Pi : \pi(i) = i\}$ esprime il fatto che per il personaggio i-esimo l'accoppiamento è stato corretto. Dal principio di inclusione-esclusione si ha che
$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_j\le n} \mathbb{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_j}).$$
Ovviamente, per ogni $j \le n$ e per ogni sottoinsieme di indici $i_1, \dots, i_j$ di $1, \dots, n$, abbiamo che
$$|A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_j}| = |\{\pi \in \Omega : \pi(i_h) = \pi_0(i_h) \text{ per } h = 1, \dots, j\}| = (n-j)!$$
quindi,
$$\mathbb{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_j}) = \frac{|A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_j}|}{|\Omega|} = \frac{(n-j)!}{n!}$$
e, fissato j il numero di addendi è pari al numero di sottoinsiemi di cardinalità j in un insieme di cardinalità n, cioè $\binom{n}{j}$, pertanto
$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\binom{n}{j}\frac{(n-j)!}{n!} = \sum_{j=1} \frac{(-1)^{j+1}}{j!} = 1 - \sum_{j=0} \frac{(-1)^j}{j!}$$

(il cui limite per $n \to +\infty$ è $1 - 1/e$).

2. Associare esattamente due fotografie (ha senso solo per $n \geq 2$) corrisponde all'evento $\cup_{1 \leq i < j \leq n}(\cap_{h \notin \{i,j\}} A_h^c \cap A_i \cap A_j)$ che è un unione di eventi disgiunti. Inoltre

$$\mathbb{P}(\cap_{h \notin \{i,j\}} A_h^c \cap A_i \cap A_j) = \frac{1}{n(n-1)} \left(1 - \sum_{j=1}^{n-2} \frac{(-1)^{j+1}}{j!} \right)$$

poiché le combinazioni favorevoli sono quelle con esattamente $n-2$ fotografie collocate in maniera errata. Più in dettaglio

$$\mathbb{P}(\text{Solo le fotografie i e j sono state associate correttamente}) = \\ \frac{|\text{le restanti } n-2 \text{ fotografie non sono state associate correttamente}|}{|\text{tutte le possibili associazioni di } n \text{ fotografie}|}.$$

Abbiamo che i casi favorevoli (i.e. il numero di associazioni tutte sbagliate di $n-2$ fotografie) sono pari a $(n-2)!q_{n-2}$, dove:

$$\begin{aligned} q_{n-2} &:= \frac{|\text{ associazioni tutte sbagliate di } n-2 \text{ foto }|}{|\text{tutte le possibili associazioni di } n-2 \text{ foto}|} \\ &= \frac{|\text{associazioni tutte sbagliate di } n-2 \text{ foto }|}{(n-2)!} \end{aligned}$$

Il numero dei casi possibili, i.e. $|$tutte le possibili associazioni di n fotografie$|$ è sempre $n!$, quindi abbiamo che

$$\mathbb{P}(\text{Solo le prime due fotografie sono state associate correttamente}) = \frac{(n-2)!q_{n-2}}{n!}$$

La probabilità dell evento cercato è quindi

$$\binom{n}{2} \frac{1}{n(n-1)} \left(1 - \sum_{j=1}^{n-2} \frac{(-1)^{j+1}}{j!} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \sum_{j=1}^{n-2} \frac{(-1)^{j+1}}{j!} \right).$$

3. Ragionando come al punto precedente si ottiene come risultato

$$\frac{1}{k!} \left(1 - \sum_{j=1}^{n-k} \frac{(-1)^{j+1}}{j!} = \right).$$

Soluzione esercizio 3.

Notiamo che risolvere l'esercizio equivale a contare quante sono le funzioni suriettive dall'insieme $\{1, \ldots, n\}$ a valori nell'insieme $\{1, \ldots, r\}$ e a calcolarne la frazione rispetto al numero totale di funzioni r^n.

Lo spazio dei campioni è quindi quello delle funzioni $\Omega := \{1, \dots, r\}^n$ e definiamo gli eventi $A_i := \{f \in \Omega : i \notin \mathrm{Im} f\}$ per $i = 1, \dots, n$.

L'evento "l'album è completo" equivale a $\cap_{i=1}^n A_i^c$. Scegliamo di applicare il principio di inclusione-esclusione utilizzando la misura di cardinalità (al posto di quella di probabilità, tanto sono una multipla dell'altra), pertanto

$$\mathrm{card}(\cap_{i=1}^k A_i^c) = n^r - \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_j \le n} \mathrm{card}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_j}).$$

Ora

$$\mathrm{card}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_j}) = (r-j)^n$$

ed il numero di addendi, analogamente all'esercizio precedente è $\binom{n}{j}$ da cui

$$\mathrm{card}(\cap_{i=1}^k A_i^c) = n^r - \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \binom{n}{j} (r-j)^n.$$

Dividendo per il numero totale funzioni r^n si ha

$$\mathbb{P}(\cap_{i=1}^k A_i^c) = n^r - \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \binom{n}{j} \left(\frac{r-j}{r} \right)^n.$$

Soluzione esercizio 4.

Non c'è perdita di generalità nel considerare $A = \{1, \dots, n\}$. Come nell'esercizio precedente risolvere l'esercizio equivale a contare quante sono le funzioni iniettive dall'insieme $\{1, \dots, k\}$ a valori nell'insieme $\{1, \dots, N\}$ che siano suriettive su A e a calcolarne la frazione rispetto al numero totale di funzioni iniettive $N!/(N-k)!$. Nella seconda parte dell'esercizio invece dovremo contare quante sono le funzioni dall'insieme $\{1, \dots, k\}$ a valori nell'insieme $\{1, \dots, N\}$ che siano suriettive su A e a calcolarne la frazione rispetto al numero totale di funzioni N^k.

Sia lo spazio dei campioni $\Omega := \{f \in \{1, \dots, N\}^k : \text{ iniettive}\}$ e definiamo gli eventi $A_i := \{f \in \Omega : i \notin \mathrm{Im} f\}$ per $i = 1, \dots, n$.

L'evento da studiare è $\cap_{i=1}^n A_i^c$. Dal principio di inclusione-esclusione

$$\mathrm{card}(\cap_{i=1}^k A_i^c) = \frac{N!}{N-k)!} - \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_j \le n} \mathrm{card}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_j}).$$

Calcoliamo gli addendi;

$$\mathrm{card}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_j}) = \begin{cases} \frac{(N-j)!}{(N-j-k)!} & \text{se } k+j \le N \\ 0 & \text{se } k+j > N \end{cases}$$

da cui

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(\cap_{i=1}^k A_i^c) &= \frac{N!}{N-k)!} - \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_j\le n} \operatorname{card}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_j}) \\ &= \frac{N!}{(N-k)!} - \sum_{j=1}^{\min(n,N-k)} (-1)^{j+1}\binom{n}{j}\frac{(N-j)!}{(N-j-k)!}\end{aligned}$$

e quindi

$$\mathbb{P}(\cap_{i=1}^k A_i^c) == 1 - \frac{(N-k)!}{N!}\sum_{j=1}^{\min(n,N-k)} (-1)^{j+1}\binom{n}{j}\frac{(N-j)!}{(N-j-k)!}.$$

Similmente, nel secondo caso

$$\operatorname{card}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_j}) = (N-j)^k$$

pertanto

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(\cap_{i=1}^k A_i^c) &= N^k - \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \sum_{1\le i_1<\cdots<i_j\le n} \operatorname{card}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_j}) \\ &= N^k - \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1}\binom{n}{j}(N-j)^k\end{aligned}$$

ed infine

$$\mathbb{P}(\cap_{i=1}^k A_i^c) = 1 - \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1}\binom{n}{j}(1-j/N)^k.$$

Soluzione esercizio 5.
Scegliamo di rappresentare con lo spazio campionario $\Omega = \{1,2,\ldots,n\}$ tutti i possibili risultati dell'esperimento " scelgo un numero in $\{1,2,\ldots,n\}$". La terminologia "numero naturale scelto a caso " sta a significare che lo spazio probabilizzabile $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ è dotato della probabilità uniforme. Sia $n > 1$ della forma $n = \prod_{k=1}^m p_k^{n_k}$ per un qualche m intero positivo, con $p_1,\ldots,p_m$ numeri primi (maggiori 1) ed $n_1,\ldots,n_m$ interi positivi. Allora un'intero i divide n se e solo se la sua scomposizione è equivalente a $\prod_{k=1}^m p_k^{i_k}$ con $0 \le i_k \le n_k$ per ogni $k = 1,\ldots,m$. Pertanto

$$\mathbb{P}(K \text{ divide } n) = \frac{|\text{casi favorevoli }|}{|\text{casi possibili}|} = \frac{\prod_{k=1}^m (n_k+1)}{n}.$$

Soluzione esercizio 6.
Osserviamo che il punto (1) è un caso particolare del punto (2) con $n = 40$,

$k=4$, $n_i = 10$ per ogni $i = 1, \dots, 4$, pertanto affrontiamo direttamente il caso più generale. Sia

$$P_x := \{f \in H : J(x) \neq J(f(x))\}, \qquad x \in X$$

e sia $X = \{x_1, \dots, x_N\}$, allora dal Principio di inclusione-esclusione

$$\begin{aligned}
\left| \bigcap_{x \in X} P_x \right| &= \sum_{i=1}^{N} (-1)^i \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_i \le N} \left| P_{x_{j_1}} \cap \cdots \cap P_{x_{j_i}} \right| \\
&= \sum_{i=1}^{N} (-1)^i \sum_{F \subseteq X : |F| = i} \left| \bigcap_{x \in F} P_x \right| \\
&= \sum_{0 \le r_1 \le n_1, \dots, 0 \le r_k \le n_k} (-1)^{\sum_{i=1}^k r_i} \sum_{F_1 \subseteq A_1, \dots, F_k \subseteq A_k : |F_i| = r_i, \forall i} \left| \bigcap_{i=1}^{k} \bigcap_{x \in F_i} P_x \right| = (*).
\end{aligned}$$

Ora se $|F_i| = r_i$ per ogni $i = 1, 2, \dots k$ si ha che

$$\left| \bigcap_{i=1}^{k} \bigcap_{x \in F_i} P_x \right| = (N - \sum_{i=1}^{n} r_i)! \prod_{j=1}^{k} \frac{n_j!}{(n_j - r_j)!}$$

che non dipende più dalla composizione di ciascun F_i, ma solo dalle cardinalità. Pertanto

$$(*) = \sum_{0 \le r_1 \le n_1, \dots, 0 \le r_k \le n_k} (-1)^{\sum_{i=1}^k r_i} (N - \sum_{i=1}^{n} r_i)! \prod_{j=1}^{k} \frac{n_j!}{(n_j - r_j)!} \sum_{F_1 \subseteq A_1, \dots, F_k \subseteq A_k : |F_i| = r_i, \forall i} 1$$

da cui si ha l'asserto semplicemente osservando che

$$|\{(F_1, \dots, F_k) : F_i \subseteq A_i, \forall i\}| = \prod_{j=1}^{k} \binom{n_j}{r_j}.$$

Soluzione esercizio 7.

Proviamo l'asserto per induzione. Se $n = 1$ è vero. Sia vero per $n \in \mathbb{N}$ allora se la successione è finita ed n è il più alto indice non c'è nulla da dimostrare, altrimenti proviamo inizialmente che $\mathbb{P}_{n+1}$ esiste, cioè che $\mathbb{P}_n(A_{n+1}) >$: infatti, per ipotesi induttiva,

$$\mathbb{P}_n(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_{n+1} | \cap_{i=1}^{n} A_i) = \mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n+1} A_i) / \mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n} A_i) \ge \mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n+1} A_i) > 0.$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{n+1}(A) = \mathbb{P}_n(A | B_{n+1}) &= \frac{\mathbb{P}_n(A \cap B_{n+1})}{\mathbb{P}_n(B_{n+1})} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B_{n+1} | \bigcap_{i=1}^{n} B_i)}{\mathbb{P}(B_{n+1} | \bigcap_{i=1}^{n} B_i)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(A \cap B_{n+1} \cap \bigcap_{i=1}^{n} B_i)}{\mathbb{P}(B_{n+1} \cap \bigcap_{i=1}^{n} B_i)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap \bigcap_{i=1}^{n+1} B_i)}{\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n+1} B_i)} = \mathbb{P}(A | \cap_{i=1}^{n+1} B_i)
\end{aligned}$$

Il secondo asserto è facilmente dimostrabile per induzione.

Soluzione esercizio 8.
La soluzione si ottiene facilmente procedendo per induzione su k da n in poi (con n fissato).

Soluzione esercizio 9.

1. Utilizziamo il Teorema delle probabilità totali
$$\mathbb{P}(R_2) = \mathbb{P}(R_2|R_1)\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(R_2|B_1)\mathbb{P}(B_1)$$
$$= \frac{2}{3} * \frac{1}{2} + \frac{1}{3} * \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
Utilizziamo la regola moltiplicativa:
$$\mathbb{P}(R_3) = \mathbb{P}(R_3|R_2 \cap R_1)\mathbb{P}(R_2|R_1)\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(R_3|R_2 \cap B_1)\mathbb{P}(R_2|B_1)\mathbb{P}(B_1)$$
$$+\mathbb{P}(R_3|B_2 \cap B_1)\mathbb{P}(B_2|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(R_3|B_2 \cap R_1)\mathbb{P}(B_2|R_1)\mathbb{P}(R_1)$$
$$= \frac{3}{4} * \frac{2}{3} * \frac{1}{2} + \frac{2}{4} * \frac{1}{3} * \frac{1}{2} + \frac{1}{4} * \frac{2}{3} * \frac{1}{2} + \frac{2}{4} * \frac{1}{3} * \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

2. Ricordiamo il Teorema di Bayes
$$\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\sum_{j\in J} \mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)} = \frac{\mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)}{\mathbb{P}(A)}$$
da cui
$$\mathbb{P}(R_1|R_2) = \frac{\mathbb{P}(R_2|R_1)\mathbb{P}(R_1)}{\mathbb{P}(R_2)} = \frac{2}{3} * \frac{1}{2} * \frac{2}{1} = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$$
quindi è più probabile che sia stata estratta una pallina rossa.

3. Proponiamo due soluzioni.
3.1. Definiamo, per ogni $x \in \{0,1\}^n$ una funzione
$$f_x(i) := \begin{cases} R_i & x_i = 1 \\ B_i & x_i = 0. \end{cases}$$
Sia $B_x := \cap_{i=1}^n f_x(i)$, allora $\{B_x\}_{x\in\{0,1\}^n}$ è una partizione dello spazio dei campioni (per induzione) tale che $\mathbb{P}(B_x) = 1/2$ per ogni $x \in \{0,1\}^n$. Pertanto
$$\mathbb{P}(B_{n+1}) = \sum_{x\{0,1\}^n} \mathbb{P}(B_{n+1}|B_x)\mathbb{P}(B_x) = \sum_{x\in\{0,1\}^n} \frac{\sum_{i=1}^n x_i + 1}{2+n}\frac{1}{2^n} = (@);$$

definiamo $K_j := \{x \in \{0,1\}^n : \sum_{i=1}^n x_i = j\}$ la cui cardinalità è $\binom{n}{j}$, da cui, ricordando che $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} = 2^j$,

$$(@) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{x \in K_j} \frac{j+1}{2+n} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n(2+n)} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (j+1)$$
$$= \frac{1}{2^n(2+n)} \left(2^n + n \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-1}{j-1} \right) = \frac{2^n + n2^{n-1}}{2^n(2+n)} = \frac{1}{2}.$$

3.2. Poniamo $\mathcal{P}(n) = \{\mathbb{P}(R_n) = \frac{1}{2}\}$. $\mathcal{P}(1)$, $\mathcal{P}(2)$ e $\mathcal{P}(3)$ sono vere, mostriamo che $\mathcal{P}(n)$ vera $\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vera, per ogni $n \geq 3$. Abbiamo che $\mathbb{P}(R_{n+1}) = \mathbb{P}(R_{n+1} \cap R_n) + \mathbb{P}(R_{n+1} \cap B_n)$. A questo punto, vorremmo poter applicare la regola moltiplicativa e poi l'ipotesi induttiva ma non possiamo farlo se non conosciamo il numero di palline presenti nell'urna dopo la $n-1$-esima estrazione. Introduciamo quindi gli eventi $A_k^{n-1} = \{$ ci sono esattamente k palline rosse dopo la $n-1$-esima estrazione $\}$ al variare di k in $1, \dots, n$. Per ogni $n \geq 3$, gli eventi A_k^{n-1} sono disgiunti, la loro unione $\cup_{k=1}^n A_k^{n-1}$ è l'evento certo e $\mathbb{P}(A_k^{n-1}) > 0$ per ogni $k = 1, \dots, n$. Abbiamo che:

$$\mathbb{P}(R_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(R_{n+1} \cap R_n \cap A_k^{n-1}) + \mathbb{P}(R_{n+1} \cap B_n \cap A_k^{n-1})$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(R_{n+1} | R_n \cap A_k^{n-1}) \mathbb{P}(R_n | A_k^{n-1}) \mathbb{P}(A_k^{n-1}) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(R_{n+1} | B_n \cap A_k^{n-1}) \mathbb{P}(B_n | A_k^{n-1}) \mathbb{P}(A_k^{n-1})$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{n+2} \frac{k}{n+1} \mathbb{P}(A_k^{n-1}) + \frac{k}{n+2} \frac{n+1-k}{n+1} \mathbb{P}(A_k^{n-1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+1-k+k+1}{n+2} \frac{k}{n+1} \mathbb{P}(A_k^{n-1})$$

D'altra parte possiamo riscrivere $\frac{k}{n+1}$ come $\mathbb{P}(R_n | A_k^{n-1})$ quindi, utilizzando l'ipotesi induttiva, otteniamo che:

$$\mathbb{P}(R_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n+1} \mathbb{P}(A_k^{n-1}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(R_n | A_k^{n-1}) \mathbb{P}(A_k^{n-1}) = \mathbb{P}(R_n) = \frac{1}{2}$$

Questo ragionamento vale per ogni $n \geq 3$, quindi abbiamo concluso.

Soluzione esercizio 10.

Poichè la probabilità di scegliere la busta contenente la promessa di pagamento è 1/3, se il concorrente decide di conservare la prima busta scelta, la probabilità di vincere è 1/3. Con la seconda strategia –consistente nel cambiare la busta che si ha in mano con la busta rimanente dopo che il conduttore ne ha mostrata una vuota– il concorrente vince se e solo se inizialmente ha scelto una delle due buste vuote. Pertanto, con la strategia del cambio della busta, la probabilità di vincere è pari a $2/3$. Poniamo $T = \{\text{Esce testa}\}$, $V = \{\text{Il concorrente vince}\}$ e supponiamo che, se esce testa, il concorrente sceglie la prima strategia, ovvero non cambia la busta. Se gioca a testa o croce fra le due strategie abbiamo, per la formula delle probabilità totali, che:

$$\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(V|T)\mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(V|T^c)\mathbb{P}(T^c) = 1/3 * 1/2 + 2/3 * 1/2 = 1/2.$$

Soluzione esercizio 11.

Sia

$U_i :=$"l'urna scelta è la numero i" $\quad i = 1, \ldots, 10$

A:="sono estratte due palline di colore differente".

Evidentemente

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U_i) &= 1/10, \\ \mathbb{P}(A|U_i) &= \frac{8i}{(4+i)(3+i)}. \end{aligned} \qquad \forall i = 1, \ldots, 10$$

Pertanto

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{10} \mathbb{P}(A|U_i)\mathbb{P}(U_i) = \frac{4}{5} \cdot \frac{i}{(4+i)(3+i)} \approx 0.506.$$

Dalla formula di Bayes

$$\mathbb{P}(U_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|U_i)\mathbb{P}(U_i)}{\sum_{j=1}^{10} \mathbb{P}(A|U_j)\mathbb{P}(U_j)} = \frac{\mathbb{P}(A|U_i)}{\sum_{j=1}^{10} \mathbb{P}(A|U_j)}$$

pertanto il massimo è assunto negli stessi valori in cui assume il massimo la funzione

$$i \mapsto \frac{i}{(4+i)(3+i)}$$

cioè $i \in \{3, 4\}$.

Soluzione esercizio 12.

Se pensiamo che ogni carta sia estraibile con uguale probabilità possiamo calcolare

$$\begin{cases} \binom{52}{3} & \text{numero dei casi possibili} \\ \binom{13}{3} & \text{numero dei casi favorevoli} \end{cases}$$

dunque la probabilità richiesta è

$$\frac{\binom{13}{3}}{\binom{52}{3}} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{52 \cdot 51 \cdot 50} = 0.013$$

Possiamo calcolare la stessa probabilità con la probabilità condizionata. Consideriamo gli eventi $A = \{\text{la prima carta estratta è picche}\}$, $B = \{\text{la seconda}$

carta estratta è picche}, $C = \{$la terza carta estratta è picche$\}$. La probabilità cercata è

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(C|A \cap B)\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) = \frac{11}{50} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{13}{52} = 0.013$$

Infatti $\mathbb{P}(A)$ è la probabilità di estrarre una delle 13 carte di picche da un mazzo di 52, $\mathbb{P}(B|A)$ è la probabilità di estrarre una delle 12 carte di picche da un mazzo di 51 e $\mathbb{P}(C|A \cap B)$ è la probabilità di estrarre una delle 11 carte di picche da un mazzo di 50.

Soluzione esercizio 13.

1. Sia $\Omega := \{(M, M), (M, F), (F, M), (F, F)\}$ con la probabilità uniforme. L'evento "almeno uno dei due è un maschio è $\{(M, M), (M, F), (F, M)\} =: A$ e $\mathbb{P}(A) = 3/4$, l'evento entrambi sono maschi è $\{(M, M)\} =: B$ da cui
$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{1}{3}.$$

2. Sia $\Omega_1 := \{1, 2\} \times \{(M, M), (M, F), (F, M), (F, F)\}$ con la probabilità uniforme e sia Y così definita:
$$Y(i, w_1, w_2) := w_i$$
che rappresenta il sesso del figlio che incontro. Quindi l'evento "incontro un figlio maschio" è $\{(1, M, M), (2, M, M), (1, M, F), (2, F, M)\} =: A$ ($\mathbb{P}(A) = 1/2)$), mentre l'evento "entrambi i figli sono maschi è $\{(1, M, M), (2, M, M)\}$ ($\mathbb{P}(B) = 1/4$). Pertanto
$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{1}{2}.$$

Una seconda soluzione è la seguente: siano X e Z due variabili aleatorie equidistribuite con range rispettivamente in $\{0, 1\}$ e $\{\omega_1 := (0, 0), \omega_2 := (0, 1), \omega_3 := (1, 0), \omega_4 := (1, 1)\}$ (con la convenzione 0 maschio, 1 femmina) e con probabilità condizionate

$$\mathbb{P}(X = 0|Y = \omega_i) := \begin{cases} 1 & i = 1 \\ 1/2 & i \in \{2, 3\} \\ 0 & i = 4. \end{cases}$$

L'ambientazione esiste (vedi soluzione precedente) e la formula di Bayes ci da

$$\mathbb{P}(Y = \omega_1|X = 0) = \frac{\mathbb{P}(X = 0|Y = \omega_1)\mathbb{P}(Y = \omega_1)}{\sum_{i=1}^{4} \mathbb{P}(X = 0|Y = \omega_i)\mathbb{P}(Y = \omega_i)} = \frac{1/4}{1/4 + 2 \cdot 1/4 \cdot 1/2} = \frac{1}{2}.$$

Soluzione esercizio 14.

Simboleggiamo gli eventi coinvolti nella maniera seguente:
A:="l'animale ha la coda lunga"
C:="l'animale ha il pelo chiaro unito"
S:="l'animale ha il pelo scuro unito"
M:="l'animale ha il pelo chiazzato".
Indipendentemente dalla scelta dello spazio di probabilità in cui ambientare il problema, dalle sole proprietà della misura di probabilità si risolve il problema partendo dai dati:

$$\mathbb{P}(C) := \frac{1}{5}, \qquad \mathbb{P}(A|C) = \frac{1}{10}$$
$$\mathbb{P}(S) := \frac{2}{5}, \qquad \mathbb{P}(S|C) = \frac{9}{10}$$
$$\mathbb{P}(M) := \frac{2}{5}, \qquad \mathbb{P}(M|C) = \frac{7}{20}.$$

1. Calcoliamo $\mathbb{P}(A)$ utilizzando la definizione di probabilità condizionata e il teorema delle probabilità totali,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|C)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(A|S)\mathbb{P}(S) + \mathbb{P}(A|M)\mathbb{P}(M)$$
$$\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{5} + \frac{9}{10}\cdot\frac{2}{5} + \frac{7}{20}\cdot\frac{2}{5} = \frac{13}{25},$$

da cui $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) = 12/25$.

2. La probabilità dell'evento M condizionata ad A,

$$\mathbb{P}(M|A) = \frac{\mathbb{P}(A|M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{7/50}{13/25} = \frac{7}{26}.$$

3. Infine la probabilità dell'evento M condizionata ad A^c,

$$\mathbb{P}(M|A^c) = \frac{\mathbb{P}(A^c \cap M)}{\mathbb{P}(A^c)} = \frac{\mathbb{P}(M) - \mathbb{P}(A|M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(A^c)} = \frac{2/5 - 7/50}{12/25} = \frac{13}{24}.$$

Soluzione esercizio 15.

Si ha che:

$$\mathbb{P}(A_2|A_1) = 1 - \mathbb{P}(A_2^c|A_1) = 1 - \frac{\mathbb{P}(A_c^2 \cap A_1)}{\mathbb{P}(A_1)}$$

d'altra parte $\mathbb{P}(A_2^c \cap A_1) \leq \mathbb{P}(A_2^c)$, quindi:

$$\mathbb{P}(A_2|A_1) \geq 1 - \frac{\mathbb{P}(A_2^c)}{\mathbb{P}(A_1)}$$

Soluzione esercizio 16.

Siano A e B gli eventi A= *"Il signor A compra il biglietto vincente"* e B= *"Il signor B compra il biglietto vincente"*. Poniamo NA = *"Il signor A non compra il biglietto vincente"*. Pertanto:

1. $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{5}$
2. $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{5}$.
3. Poichè $B \subset NA$ allora
$$\mathbb{P}(B|NA) = \frac{\mathbb{P}(B \cap NA)}{\mathbb{P}(NA)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{1/5}{4/5} = \frac{1}{4}$$
(probabilità di estrarre un biglietto vincente dall'insieme dei quattro biglietti rimasti di cui uno vincente)
4. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = \frac{2}{5}$, dal momento che $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ perchè c'è solo un biglietto vincente.

Soluzione esercizio 17.
Introduciamo gli eventi V, T_i $i = 1, \ldots, 6$ e N definiti da:
$V =$ "*Rossi parte per Roma*",
$T_i =$ "*Rossi parte con l'i-esimo treno*" e
$N =$ "*Rossi non prende nessuno dei primi 5 treni*".
Allora
$$\mathbb{P}(T_i) = \mathbb{P}(T_i|V)\mathbb{P}(V) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$
$$\mathbb{P}(N) = \mathbb{P}(V^c) + \mathbb{P}(T_6) = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}.$$
Applicando la formula di Bayes a T_6 e N otteniamo la probabilità cercata:
$$\mathbb{P}(T_6 \mid N) = \frac{\mathbb{P}(N \mid T_6)\mathbb{P}(T_6)}{\mathbb{P}(N)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{12}}{7/12} = \frac{1}{7}.$$

Soluzione esercizio 18.
Siano $C = \{$ L' operaio ha frequentato il corso$\}$ e
$Q = \{$ L'operaio raggiunge la quota di produzione $\}$.

(a) $\mathbb{P}(Q) = \mathbb{P}(Q|C)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(Q|\overline{C})\mathbb{P}(\overline{C}) = 0.86 * 0.8 + 0.35 * 0.2 = 0.758.$

(b) Utilizziamo il teorema di Bayes: $\mathbb{P}(C|Q) = \frac{\mathbb{P}(Q|C)\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(Q)} = \frac{0.86*0.8}{0.758} = 0.9076$

Soluzione esercizio 19.
Si considerino gli eventi T_+:="il test è positivo",
T_-:="il test è negativo",
A:="il paziente è ammalato",
S:="il paziente è sano".
Sia $\mathbb{P}(A) = x$, $\mathbb{P}(T_+|A) = p$ e $\mathbb{P}(T_-|S) = q$.

1. Dalla formula di Bayes

$$\mathbb{P}(A|T_+) = \frac{\mathbb{P}(T_+|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(T_+|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(T_+|S)\mathbb{P}(S)} = \frac{px}{px + q(1-x)}$$

   che è crescente in x se $p > q$. Il risultato numerico con $x = 1/2000$, $p = 0.999$ e $q = 0.002$ è $4995/24985$.

2. Analogamente

$$\mathbb{P}(S|T_-) = \frac{\mathbb{P}(T_-|S)\mathbb{P}(S)}{\mathbb{P}(T_-|S)\mathbb{P}(S) + \mathbb{P}(T_-|A)\mathbb{P}(A)} = \frac{(1-q)(1-x)}{(1-q)(1-x) + (1-p)x}$$

   Il risultato numerico con $x = 1/2000$, $p = 0.999$ e $q = 0.002$ è $9975010/9975015$.

3. La probabilità cercata è

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((T_+ \cap A) \cup (T_- \cap S)) &= \mathbb{P}((T_+ \cap A)) + \mathbb{P}((T_- \cap S)) \\ &= \mathbb{P}((T_+|A))\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}((T_-|S))\mathbb{P}(S) \\ &= px + (1-q)(1-x)\end{aligned}$$

Il risultato numerico è $19996001/2000000$.

Soluzione esercizio 20.
Si ha che:

1. Consideriamo, senza perdita di generalità, gli importi $1, \ldots, n$. Sia N_i l'importo vinto scegliendo la strategia i e sia Ω l'insieme delle permutazioni di $\{1, \ldots, n\}$.

   Se $n = 2$ è banale vedere che, per qualsiasi scelta di i, la variabile N_2 ha distribuzione uniforme sui valori $1, 2$. Supponiamo pertanto $n \geq 3$.

   Se $i = 0$ allora $N_0(\omega) = \omega(1)$, pertanto $\mathbb{P}(N_0 = j) = \mathbb{P}(\omega(1) = j) = 1/n$ per ogni $j = 1, 2, \ldots, n$.

   Se $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ allora

$$\mathbb{P}(N_i = j) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(N_i = j, \omega(1) = k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(N_i = j|\omega(1) = k)\mathbb{P}(\omega(1) = k)$$

   dove, evidentemente $\mathbb{P}(\omega(t) = j) = 1/n$ per ogni scelta di $t, k \in \{1, \ldots, n\}$. Distinguiamo due casi:

   a) se $k + i > n$ allora $N(\omega) = \omega(n)$ pertanto

$$\mathbb{P}(N_i = j, \omega(1) = k) = \mathbb{P}(\omega(n) = j, \omega(1) = k) = \begin{cases} 0 & k = j \\ \frac{1}{n(n-1)} & k \neq j; \end{cases}$$

b) se $k+i \leq n$ allora

$$\mathbb{P}(N_i = j|\omega(1) = k) = \begin{cases} \frac{1}{n-k} & j > k \\ 0 & j \leq k. \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_i = j) &= \sum_{k=1}^{n-i} \mathbb{P}(N_i = j|\omega(1) = k)\mathbb{P}(\omega(1) = k) \\ &= \sum_{k=n-i+1}^{n} \mathbb{P}(N_i = j, \omega(1) = k) = (*) \end{aligned}$$

anche qui distinguiamo due casi:

a) se $j \leq n-i$ allora

$$\begin{aligned} (*) &= \sum_{k=1}^{j-1} \mathbb{P}(N_i = j|\omega(1) = k)\frac{1}{n} + \sum_{k=n+1-i}^{n} \mathbb{P}(N_i = j, \omega(1) = k) \\ &= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{n-k} + \frac{i}{n-1}\right); \end{aligned}$$

b) se $j > n-i$ allora

$$(*) = \sum_{k=1}^{n-i} \frac{1}{n(n-k)} + \frac{i-1}{n(n-1)}.$$

Infine la distribuzione (o legge) di N_i è

$$\mathbb{P}(N_i = j) = \begin{cases} \frac{i}{n(n-1)} & j = 1 \\ \frac{i}{n(n-1)} + \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{n(n-k)} & 1 < j \leq n-i \\ \frac{i-1}{n(n-1)} + \sum_{k=1}^{n-i} \frac{1}{n(n-k)} & n-i < j. \end{cases}$$

2. Studiamo l'andamento di $\mathbb{P}(N_i = j)$; se $i = 0$ la funzione $j \mapsto \mathbb{P}(N_i = j)$ è costante e vale $1/n$. Se $i > 0$ allora $j \mapsto \mathbb{P}(N_i = j)$ è strettamente crescente fino a $j = n-i+1$ quindi è costante.

$$\mathbb{P}(N_{i+1} = j) - \mathbb{P}(N_i = j) = \begin{cases} \frac{1}{n(n-1)} > 0 & 1 \leq j < n-i \\ 0 & j = n-i \\ \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{ni} & j > n-i \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(N_1 = j) - \mathbb{P}(N_0 = j) = \begin{cases} -\frac{n-2}{n(n-1)} < 0 & j = 1 \\ -\frac{n-2}{n(n-1)} + \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{(n(n-k)} & 1 < j \leq n-1 \\ \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{n(n-k)} & j = n. \end{cases}$$

In particolare

$$\mathbb{P}(N_i = n) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n-i} \frac{1}{n(n-k)} - \frac{i-1}{n(n-1)} & i > 0 \\ \frac{1}{n} & i = 0, \end{cases}$$

da cui $\mathbb{P}(N_1 = n) > \mathbb{P}(N_2 = n) > \cdots > \mathbb{P}(N_{n-1} = n) > \mathbb{P}(N_0 = n)$.

Ad esempio

n	$\mathbb{P}(N_1 = n)$	$\mathbb{P}(N_0 = n)$
2	1/2	1/2
3	1/2	1/3
4	11/24	1/4
5	0.4167	1/5=0.2
6	0.3806	1/6= 0.1666
7	0.35	1/7=0.1429
8	0.3241	1/8=0.125
100	0.0518	1/100=0.01.

Soluzione esercizio 21.

1. Sia A misurabile allora,
$$\{C_N \in A\} = \cup_{i\in I}\{C_N \in A, N = i\} = \cup_{i\in I}\{C_i \in A, N = i\}$$
pertanto è misurabile.

2. $$\begin{aligned}\mathbb{P}(C_N \in A) &= \sum_{i\in I} \mathbb{P}(C_N \in A | N = i)\mathbb{P}(N = i) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(C_i \in A | N = i)\mathbb{P}(N = i) \\ &= \sum_{i\in I} \mathbb{P}(C_N \in A)\mathbb{P}(N = i)\end{aligned}$$
dove, nell'ultima uguaglianza, abbiamo utilizzato l'ipotesi di indipendenza.

3. L'integrabilità di C_N è garantita dalla scomposizione
$$C_N = \sum_{i\in I} 1_{N=i} C_i$$
e dal Teorema della convergenza monotona.
Analogamente al caso precedente, o direttamente dalla scomposizione precedente,
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[C_N] &= \sum_{i\in I} \mathbb{E}[C_N | N = i]\mathbb{P}(N = i) = \sum_{i\in I} \mathbb{E}[C_i | N = i]\mathbb{P}(N = i) \\ &= \sum_{i\in I} \mathbb{E}[C_N]\mathbb{P}(N = i).\end{aligned}$$

4. Dai punti precedenti

$$\mathbb{P}(C_N = j_0) = \sum_{i \geq j_0} \frac{1}{i} p(1-p)^{i-1}.$$

Da noti teoremi sulle serie di potenze si ha che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} \sum_{i \geq j_0} (1-p)^i \frac{1}{i} = - \sum_{j \geq j_0} (1-p)^{i-1} = - \frac{(1-p)^{j_0-1}}{p}$$

pertanto

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C_n = j_0) &= \frac{1-p}{p} \int_p^1 \frac{(1-s)^{j_0-1}}{s} \mathrm{d}s \\
&= \frac{1-p}{p} \int_p^1 \sum_{r=0}^{j_0-1} \binom{j_0-1}{r} (-1)^r s^r \mathrm{d}s \\
&= \frac{1-p}{p} \sum_{r=1}^{j_0-1} \frac{(-1)^r}{r} \binom{j_0-1}{r} (1-p^r) + \frac{1-p}{p} \log \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

Soluzione esercizio 22.

Sia X la variabile aleatoria a valori in I di legge $\mathbb{P}(X = i) = p_i$, $\forall i \in I$ e siano $\{C_i\}_{i \in I}$ le variabili non negative che controllano il volume delle puntante su ciascun valori $i \in I$ sia $C := \sum_{i \in I} C_i$ e si assuma che quest' ultima variabile sia integrabile.

All'uscita del valore I corrisponde un guadagno degli organizzatori pari a $C - C_i q_i$ quindi la variabile "guadagno" è

$$G := C - C_X q_X = \sum_{i \in I} C_i (1 - q_i \mathbb{1}_{X=i}).$$

Dal Teorema di convergenza monotona e dall'ipotesi di indipendenza si ha

$$\mathbb{E}[G] = \sum_{i \in I} \mathbb{E}[C_i](1 - p_i q_i);$$

Osserviamo che, banalmente, presa una successione $\{h_i\}_i$ di valori non negativi allora

$$\sum_i h_i r_i \geq 0 \,(\text{risp. } > 0), \ \forall \{r_i\} : r_i \geq 0, \sum_i r_i = 1 \iff h_i \geq 0 \,(\text{risp. } > 0) \ \forall i;$$

da cui si ottiene la condizione necessaria e sufficiente $p_i q_i < 1$, per ogni $i \in I$.

Oss. Si osservi che la condizione di indipendenza, che traduce l'ignoranza da parte dello scommettitore del risultato finale, risulta necessaria affinché si possa trovare una strategia; se infatti $C := \delta_{i,X}$ allora nessuna strategia sarebbe attuabile allo scopo di ottenere un valore atteso positivo.