4 Esercitazione 4: / /

4.1 Indipendenza e indipendenza condizionata

Esercizio 1 *Siano A e B due eventi tali che $A \supseteq B$; si mostri che A e B sono indipendenti se e solo se $\mathbb{P}(A) = 1$ oppure $\mathbb{P}(B) = 0$*

Esercizio 2 **

1. *Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ e $B \subseteq A$ tale che $\mathrm{card}(B) < +\infty$, e sia $\{K_i\}_{i\in A}$ eventi indipendenti tali che $\mathbb{P}(K_i) \in [0, 1)$ per ogni $i \in A$; allora le seguenti affermazioni sono equivalenti*

   (i)
   $$\mathbb{P}(\cup_{i\in A} K_i) = 1;$$

   (ii)
   $$\mathbb{P}(\cup_{i\in A\setminus B} K_i) = 1.$$

2. *Sia $\{K_i\}_{i=1}^n$ tali che $\mathbb{P}(K_i) \in [0, 1)$; si mostri che se $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n K_i) = 1$ allora $\{K_i\}_{i=1}^n$ non sono indipendenti.*

Esercizio 3 * *Sia $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty}$ una successione di eventi indipendenti.*

1. *Si trovino condizioni affinché $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{+\infty} A_i) = 1$.*

2. *Si definisca*
   $$\nu(\omega) := \min\{n \geq 1 : \omega \in A_n\}$$
   (con la consueta convenzione $\min \emptyset = +\infty$); si calcoli la legge di ν.

Esercizio 4 *Una roulette semplificata è formata da 12 numeri che sono classificati "rosso"(R) e "nero" (N) in base allo schema seguente:*

1 R	7 N
2 R	8 R
3 N	9 N
4 N	10 N
5 R	11 R
6 N	12 R

Siano $A = \{$esce un numero pari$\}$, $B = \{$esce un numero rosso$\}$, $C = \{$esce un numero $\leq 6\}$ e $D = \{$esce un numero $\leq 8\}$. Stabilire se:

1. *gli eventi A, B e C sono a 2 a 2 indipendenti.*

2. *A, B, C costituiscono una famiglia di eventi indipendenti.*

3. *A, B, D costituiscono una famiglia di eventi indipendenti.*

4. *sia $E = \{$ esce un numero dispari $\leq 3\}$, è indipendente da A e da D ?*

5. *supponiamo di sapere che esce un numero rosso, gli eventi A e C sono ancora indipendenti ?*

6. *Gli eventi D e C sono indipendenti ? Sia $F = \{$esce un numero dispari $\leq 7\}$, D e C sono indipendenti condizionatamente all'evento F?*

Esercizio 5 *Un tribunale sta investigando sulla possibilità che sia accaduto un evento E molto raro e a tal fine interroga due testimoni, Arturo e Bianca. L'affidabilità dei due testimoni è nota alla corte: Arturo dice la verità con probabilità α e Bianca con probabilità β e i loro comportamenti sono indipendenti. Siano A e B gli eventi Arturo e Bianca rispettivamente affermano che E è accaduto, e sia $p = P(E)$. Qual è la probabilità che E sia accaduto sapendo che Arturo e Bianca hanno dichiarato che è accaduto? Assumendo $\alpha = \beta = 0.9$ e $p = 10^{-3}$, quale conclusione traete ?*

Esercizio 6 *Filiberto possiede 5 monete di cui 3 eque e 2 truccate in modo tale che se lanciate diano sempre testa. Filiberto sceglie a caso una delle 5 monete e la lancia 3 volte.*

1. *Calcolare la probabilità di ottenere 3 teste.*

2. *Supponiamo che dopo aver lanciato 3 volte la moneta Filiberto abbia ottenuto 3 teste. Ora Filiberto è (erroneamente!) convinto che lanciando la stessa moneta una quarta volta otterrà croce con grande probabilità. Calcolare la probabilità di ottenere croce al quarto lancio* sapendo che *nei primi tre si è ottenuto testa.*

3. Supponendo che *al quarto lancio Filiberto abbia ottenuto ancora testa calcolare la probabilità che la moneta che Filiberto ha lanciato quattro volte sia una di quelle truccate.*

Esercizio 7 ** *Si chiama affidabilità di un sistema la probabilità che funzioni. Mettendo in parallelo dei componenti, il sistema complessivo funzionerà se e solo se almeno uno dei componenti funziona; analogamente mettendo in serie dei componenti il sistema funzionerà se e solo se tutti i componenti funzioneranno. Abbiamo a disposizione n tipi di componenti di affidabilità $a_1, \ldots, a_n$; di ciascun tipo ne vogliamo utilizzare k e sono indipendenti gli uni dagli altri. Cosa ci conviene fare, in termini di affidabilità del sistema finale, mettere in* *serie n sistemi ciascuno formato da k componenti di ugual affidabilità in parallelo oppure mettere in parallelo k sistemi ciascuno formato da n elementi (uno per ciascun tipo) in serie?*

Cosa si può dire nel caso in cui i componenti siano generici (cioè non necessariamente indipendenti) e di affidabilità qualsiasi?

Esercizio 8 ** *Mostrare che uno spazio campionario discreto non può contenere una successione infinita $A_1, \ldots, A_n \ldots$ di eventi indipendenti ognuno di probabilità $1/2$. Dare un esempio in uno spazio di probabilità di una successione infinita di eventi indipendenti di probabilità $1/2$*

Esercizio 9 *** *Sia $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una successione di valori compresi nell'intervallo reale $[0,1]$ e sia $\alpha_i := \min(p_i, 1-p_i)$.*

1. *Mostrare che se $\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i = +\infty$ allora uno spazio campionario discreto non può contenere una sucessione $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ di eventi indipendenti tali che $\mathbb{P}(A_i) = p_i$.*

2. *Mostrare con un esempio se $\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i < +\infty$ allora esiste uno spazio campionario discreto contenente una sucessione $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ di eventi indipendenti tali che $\mathbb{P}(A_i) = p_i$.*

Esercizio 10 * *Sia K un numero naturale compreso fra 1 e n ($n \in \mathbb{N}^*$). Sia $n > 1$ un numero naturale. Sia K un naturale scelto a caso e compreso tra 1 ed n. Provare che la probabilità che K sia primo con n è*

$$\prod_{p \text{ primo } : p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

dove il prodotto è fatto sui numeri primi p che dividono n. Mostrare inoltre che

1. *se una successione $\{p_i\}_i$ soddisfa $p_i \in [0,1]$ per ogni i allora $\prod_i (1-p_i) = 0$ se e solo se $\sum_i p_i = +\infty$;*

2. *$\sum_{p \text{ primi}} 1/p = +\infty$.*

4.2 Processo di Bernoulli

Esercizio 11 *Sia n un intero maggiore di uno. Si consideri l'esperimento di lanciare $2n$ volte una moneta equilibrata. Mostrare che la probabilità $p_{n,2n}$ di osservare un numero di teste minore di n è sempre minore di $1/2$ e vale il seguente risultato:*

$$\lim_{n\to+\infty} p_{n,2n} = 1/2.$$

Esercizio 12 *Si consideri una successione di lanci di una moneta equilibrata.*

1. *Qual è la probabilità di ottenere testa per la prima volta in un lancio di indice dispari ?*
2. *Si consideri più in generale, per ogni insieme A di interi strettamente positivi, la probabilità p_A di ottenere testa per la prima volta in un lancio con indice appartenete ad A. É possibile scegliere A in modo che risulti $p_A = 3/8$?*
3. *Scelto un qualsiasi valore $\alpha \in [0, 1]$, mostrare che è possibile scegliere A in modo che risulti $p_A = \alpha$?*

Esercizio 13 *Viene condotto un esperimento costituito da infinite prove indipendenti, con probabilità di successo pari a p.*

1. *Qual è la probabilità che il primo successo avvenga all'istante i?*
2. *Qual è la probabilità che il primo successo avvenga al più tardi all'istante i?*
3. *Qual è la probabilità che il primo successo avvenga all'istante i dato che all'istante n avviene un successo?*
4. *Qual è la probabilità che il primo successo avvenga alla prova i-esima, sapendo che il successo k-esimo avviene alla prova n-esima?*

   Calcolo esplicito nel caso $k = 2$

Esercizio 14 *Si consideri una successione di variabili $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ i.i.d. Bernoulliane di parametro p. Sia $N := \min\{n \in \mathbb{N}^* : X_n = 1\}$ ($\min \emptyset \equiv \inf \emptyset := +\infty$) l'istante del primo successo; N è pertanto una variabile a valori in $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. Determinare*

1. $\mathbb{P}(N \geq i)$ *dove* $i \in \mathbb{N}^*$;
2. $\mathbb{P}(N = +\infty)$;
3. $\mathbb{P}(N = i)$ *dove* $i \in \mathbb{N}^*$;
4. $\mathbb{E}(N)$.

Esercizio 15 ** *(Scimmie tipografe) Sia X al più numerabile e $\{p_i\}_{i \in X}$ una distribuzione di probabilità discreta non degenere (i.e. $p_i > 0$ per ogni $i \in X$ e $\sum_{i \in X} p_i = 1$). Siano $\{Z_j\}_{j=1}^{\infty}$ una successione di variabili i.i.d. a valori in X con legge $\{p_i\}_{i \in X}$. Sia infine $X_0 := \bigcup_{i=1}^{+\infty} X^n$ e per ogni $y \in X_0$ si definisca $l(y) \in \mathbb{N}*$ in maniera che ${}^y \in X^{l(y)}$. Mostrare che*

1. *per ogni* $y \in X_0$ *si ha*
$$\mathbb{P}(\exists i \in \mathbb{N}^* : (X_i, \dots, X_{i+l(y)-1}) = y) = 1;$$

2. $$\mathbb{P}(\limsup_i \{\exists i \in \mathbb{N}^* : (X_i, \dots, X_{i+l(y)-1}) = y\}) = 1;$$

3. $$\mathbb{P}(\forall y \in X_0 : \exists i \in \mathbb{N}^* : (X_i, \dots, X_{i+l(y)-1}) = y) = 1;$$

4. $$\mathbb{P}(\limsup_i \{\forall y \in X_0 : \exists i \in \mathbb{N}^* : (X_i, \dots, X_{i+l(y)-1}) = y\}) = 1;$$

5. *definito* $N_y := \min\{i : (X_i, \dots, X_{i+l(y)-1}) = y\} + l(y) - 1$, *allora*
$$\mathbb{E}(N_y) \leq \frac{l(y)}{\prod_{j=1}^{l(y)} p_{y_j}}.$$

Esercizio 16 *Si consideri una popolazione in cui una persona su* 100 *abbia una certa malattia. Un test è disponibile per diagnosticare tale malattia. Si supponga che il test non sia perfetto, in quanto esso risulta positivo (ovvero indica la presenza della malattia) nel* 5% *dei casi quando è effettuato su persone sane, mentre risulta negativo (indicando l'assenza della malattia) nel* 20% *dei casi quando è effettuato su persone malate. Si supponga che il test sia effettuato secondo il seguente protocollo su una persona scelta casualmente nella popolazione: se il risultato è negativo il paziente non viene sottosposto ad alcuna cura, mentre se il risultato è positivo si ripete il test; se anche il risultato del secondo test è positivo il paziente è sottoposto a cura, altrimenti no. In definitiva ci vogliono due risultati positivi su due test per la cura, in tutti gli altri casi il paziente viene dimesso. Si calcolino:*

1. *la probabilità che la persona in questione sia sottoposta a due test e che ambedue risultino positivi;*

2. *la probabilità che tale persona sia malata, sapendo che gli sono stati fatti due test risultati entrambi positivi.*

3. *Con questo protocollo, qual è la probabilità che una persona esaminata non sia sottoposta a cura, pur essendo effettivamente malata? Qual è la probabilità di essere malati se si è dimessi?*

4. *Confrontare le probabilità condizionate dei punti precedenti con quelle ottenute praticando un solo test.*

Riprovare l'esercizio con $\mathbb{P}(I_1|M) = 0.005$, $\mathbb{P}(I_1|M^c) = 0.999$ *e* $\mathbb{P}(M) = 10^{-4}$.

SOLUZIONI

Soluzione esercizio 1.
Essendo $B = A \cap B$ allora se $\mathbb{P}(A) = 1$ si ha $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A)$ mentre se $\mathbb{P}(B) = 0$ allora $\mathbb{P}(A \cap B) = 0 = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A)$. Viceversa se sono indipendenti

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

cioè $\mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(A)) = 0$ che si risolve se e solo se $\mathbb{P}(A) = 1$ oppure $\mathbb{P}(B) = 0$.

Soluzione esercizio 2.

1. **(ii) $\Longrightarrow$ (i)** È ovvio.
   (i) $\Longrightarrow$ (ii)] Sia $A_n := \{0, 1, 2, \ldots, n\} \cap A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora

   $$\mathbb{P}(\cup_{i\in A} K_i) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\cup_{i\in A_n} K_i) = 1.$$

   In particolare $\{K_i\}$ sono indipendenti se e solo se $\{K_i^c\}$ lo sono, pertanto

   $$\mathbb{P}(\cup_{i\in A} K_i) = 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\cup_{i\in A_n} K_i) = 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\cap_{i\in A_n} K_i^c) = 1$$
   $$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \prod_{j\in A_n} (1 - \mathbb{P}(K_i)) = 0.$$

   Dalle ipotesi, $\prod_{j\in B}(1 - \mathbb{P}(K_i)) > 0$ essendo B di cardinalità finita, quindi

   $$\lim_{n\to+\infty} \prod_{j\in A_n} (1 - \mathbb{P}(K_i)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \prod_{j\in A_n\setminus B} (1 - \mathbb{P}(K_i)) = 0$$

   da cui

   $$\mathbb{P}(\cup_{i\in A\setminus B} K_i) = 1 - \lim_{n\to+\infty} \prod_{j\in A_n\setminus B} (1 - \mathbb{P}(K_i)) = 1.$$

2. Dal punto precedente si ha che se $B = A = \{1, 2, \ldots, n\}$ allora (ii) non è verificata, pertanto si ha l'asserto.

Soluzione esercizio 3.
Sia $p_n := \mathbb{P}(A_n)$ per ogni $n = 1, 2, \ldots$.

1. Si noti innanzitutto che, ricordando la relazione $\log(1 + \epsilon_n) \sim \epsilon_n$ valida se $\epsilon_n \to 0$, se $p_i < 1$ per ogni i allora

   $$\prod_{i=1}^{+\infty} (1 - p_i) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} p_i < +\infty.$$

   Pertanto dall'esercizio precedente si ha che $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{+\infty} A_i) = 1$ se e solo se si verifica uno dei due casi seguenti:

a) $p_i = 1$ per almeno un valore di i;

b) $p_i < 1$ per ogni i e $\sum_{i=1}^{+\infty} p_i < +\infty$. Per giungere a questa conclusione si possono seguire due strade:

b.1) Si osservi che $\mathbb{P}(\cup_i A_i) = 1$ se e solo se $0 = \mathbb{P}(\cap_i A_i) = \prod_i (1-p_i)$, pertanto se $p_i < 1$ per ogni i allora $\mathbb{P}(\cup_i A_i) = 1$ se e solo se $\sum_i p_i < +\infty$.

b.2) Dall' esercizio precedente (o analogamente al caso (b.1)) si ha che, nell' ipotesi $p_i < 1$ per ogni i, $\prod_i (1-p_i) = 0$ se e solo se per ogni $i_0 \geq 1$ $\prod_{i \geq i_0} (1-p_i) = 0$ cioè se e solo se $\mathbb{P}(\cup_{i \geq i_0} A_i) = 1$ i.e. se e solo se $\mathbb{P}(\limsup A_i) = 1$; dal lemma di Borel-Cantelli quest'ultima relazione è equivalente a $\sum_{i=1}^{+\infty} p_i < +\infty$.

2. Si osservi che $\mathbb{P}(\nu < +\infty) = 1$ se e solo se $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{+\infty} A_i) = 1$. Facilmente

$$\mathbb{P}(\nu = n) = \begin{cases} p_1 & i = 1 \\ p_n \prod_{i=1}^{n-1} (1-p_i) & i \in \mathbb{N}, i \geq 2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Soluzione esercizio 4.

1. Iniziamo a calcolare $P(A)$, $P(B)$ e $P(C)$:

$$P(A) = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{1}{2},\ P(C) = \frac{1}{2}$$

Dobbiamo verificare che

$$P(A \cap B) = P(A)P(B),\ P(A \cap C) = P(A)P(C),\ P(B \cap C) = P(B)P(C) \tag{1}$$

Calcoliamo:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4},\ P(A \cap C) = \frac{1}{4},\ P(B \cap C) = \frac{1}{4}$$

Quindi (1) è verificata.
Si osservi che in generale se A e B sono indipendenti e così anche C e B, allora

$$\mathbb{P}(A \cap C | B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(C|B) \iff \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).$$

2. Dobbiamo verificare che oltre alla condizione (1) valga anche:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) \tag{2}$$

Ma

$$P(A \cap B \cap C) = P(\{\text{Esce un numero rosso pari e} \leq 6\}) = \frac{1}{12}$$

mentre $P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}$, quindi la condizione (2) non è verificata: A, B e C non sono indipendenti fra di loro.

3. Calcoliamo $P(D) = \frac{8}{12}$:

$$P(A \cap D) = \frac{4}{12} = P(A)P(D), \;\; P(B \cap D) = \frac{4}{12} = P(B)P(D)$$

Quindi resta da verificare che:

$$P(A \cap B \cap D) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{2}{3} = P(A)P(B)P(D)$$

perció: A, B e D sono indipendenti fra di loro.

4. Notiamo che $A \cap E = \emptyset$ quindi $P(A \cap E) = 0$ mentre $P(A)P(E) = \frac{1}{12}$, quindi non sono indipendenti. Attenzione a non scambiare la nozione di incompatibilità con quella di indipendenza, infatti $D \cap E \neq \emptyset$, peró $P(D \cap E) = \frac{1}{6}$ che è comunque diverso da $P(D)P(E) = \frac{2}{3} * \frac{1}{6} = \frac{1}{9}$. L'indipendenza è una proprietá che deriva dalla probabilitá e la incompatibilità è una proprietà degli eventi (degli insiemi).

5. Abbiamo che:

$$P(A|B) \doteq \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{2} \text{ e } P(C|B) \doteq \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{2}$$

D'altra parte

$$P(A \cap C|B) \doteq \frac{P(A \cap C \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{4} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \frac{P(C \cap B)}{P(B)}.$$

Quindi abbiamo che A e C non sono piú condizionatamente indipendenti dato B, a conferma di quanto abbiamo detto, i.e. che l'indipendenza è una proprietá legata alla probabilitá .

6. Si ha che $C \subset D$, $P(D) < 1$ e $P(C) > 0$, quindi C e D non sono indipendenti, d'altra parte:

$$P(C|F) = \frac{3}{4} \quad \text{e} \quad P(D|F) = 1,$$

quindi C e D sono condizionatamente indipendenti dato F.

Soluzione esercizio 5.

Dobbiamo calcolare $P(E|A \cap B)$. Per la formula di Bayes si ha che:

$$P(E|A \cap B) = \frac{P(A \cap B|E)P(E)}{P(A \cap B)}$$

Notiamo che $P(A \cap B|E)$ corrisponde alla probabilità che Arturo e Bianca dicano la verità. Dal momento che i comportamenti di Arturo e Bianca sono indipendenti, essi dicono la verità indipendentemente l'uno dall'altra, perciò si ha che: $P(A \cap B|E) = P(A|E)P(B|E) = \alpha\beta$. Quindi:

$$P(E|A \cap B) = \frac{P(A \cap B|E)P(E)}{P(A \cap B)} = \frac{\alpha\beta p}{P(A \cap B)}$$

Resta da calcolare $P(A \cap B)$, applicando la formula delle probabilità totali, si ha che:

$$P(A \cap B) = P(A \cap B|E)P(E) + P(A \cap B|E^c)P(E^c) = \alpha\beta p + P(A \cap B|E^c)P(E^c)$$

Per calcolare $P(A \cap B|E^c)$ osserviamo che $\{A, B\}$ sono indipendenti sotto $\mathbb{P}(\cdot|E^c)$ se e solo se $\{A^c, B^c\}$ lo sono; quest'ultima affermazione è vera (poiché corrisponde al fatto che entrambi dicano la verità) e quindi

$$P(A \cap B|E^c) = (1 - \alpha)(1 - \beta)$$

da cui

$$P(A \cap B) = P(A \cap B|E)P(E) + P(A \cap B|E^c)P(E^c) = \alpha\beta p + (1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - p)$$

E quindi:

$$P(E|A \cap B) = \frac{\alpha\beta p}{\alpha\beta p + (1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - p)}$$

Se sostituiamo i valori numerici otteniamo che:

$$P(E|A \cap B) = \frac{(0.9)^2 * 10^{-3}}{(0.9)^2 * 10^{-3} + (0.1)^2 * (1 - 10^{-3})} = 0.075$$

Concludiamo quindi che, nonostante Arturo e Bianca siano molto affidabili e affermino che E sia accaduto, la corte resta scettica riguardo al fatto che E sia veramente accaduto: infatti $0.075 >> 0.001$ ma è ancora un valore molto lontano da 1.

Soluzione esercizio 6.

1. Siano $A = \{\text{Filiberto ottiene 3 teste nei primi 3 lanci}\}$ e $B = \{\text{Filiberto sceglie una moneta equa}\}$, allora $P(B) = 3/5$, $P(B^c) = 2/5$, $P(A|B) = 1/8$ e $P(A|B^c) = 1$. Dalla formula delle probabilità totali otteniamo

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c) = \frac{19}{40} = 0.475.$$

2. Sia $C = \{\text{Filiberto ottiene testa nel quarto lancio}\}$, allora

$$P(C|A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{P(C \cap A|B)P(B) + P(C \cap A|B^c)P(B^c)}{P(A)} =$$
$$= \frac{P(C|B)P(A|B)P(B) + P(C \cap A|B^c)P(B^c)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{5} + 0}{\frac{19}{40}} = \frac{3}{38}$$

dove abbiamo utilizzato la formula delle probabilità totali ed il fatto che A e C sono condizionatamente indipendenti dato B (Filiberto è deluso).

3. Sia $Q = \{$Filiberto ottiene 4 teste in 4 lanci$\}$, allora la formula di Bayes afferma che

$$P(B^c|Q) = \frac{P(Q|B^c)P(B^c)}{P(Q)} = \frac{1 \cdot \frac{2}{5}}{\frac{1}{16} \cdot \frac{3}{5} + 1 \cdot \frac{2}{5}} = \frac{32}{35}$$

Soluzione esercizio 7.
Mostriamo che mettere in serie n elementi ciascuno formato da k elementi dello stesso tipo in parallelo è sempre più conveniente piuttosto che che mettere in parallelo k elementi ciascuno formato da n componenti (uno per tipo) in serie. In realtà i due sistemi hanno ugual affidabilità se (e solo se) $n = 1$ oppure $k = 1$ oppure $a_i = 0$ per qualche i oppure $a_i = 1$ per ogni i.

Le due affidabilità si calcolano facilmente

$$A_1 = \prod_{i=1}^{n} (1 - (1 - a_i)^k)$$

$$A_2 = 1 - (1 - \prod_{i=1}^{n} a_i)^k.$$

Mostriamo che se $a_i \in [0, 1]$ per ogni $i = 1, \ldots, n$ allora

$$\prod_{i=1}^{n} (1 - (1 - a_i)^k) \geq 1 - (1 - \prod_{i=1}^{n} a_i)^k$$

e l'uguaglianza si verifica se e solo se $k = 1$ oppure $n = 1$ oppure $a_i = 0$ per qualche i oppure $a_i = 1$ per ogni i.

Che ciascuna di queste condizioni implichi l'uguaglianza è ovvio, supponiamo quindi che $a_i \in (0, 1)$ per ogni i, $n, k > 1$. Definiamo le seguenti funzioni:

$$G_n(a_1, \ldots, a_n) := \prod_{i=1}^{n} (1 - (1 - a_i)^k) - (1 - (1 - \prod_{i=1}^{n} a_i)^k)$$

$$F(a, b) := (1 - (1 - a)^k)(1 - (1 - b)^k) - (1 - (1 - ab)^k);$$

si vede facilmente che

$$G_n(a_1, \ldots, a_n) = (1 - (1 - a_n)^k) G_{n-1}(a_1, \ldots, a_{n-1}) + F(\prod_{i=1}^{n-1} a_i, a_n).$$

Mostriamo quindi che $F(a, b) \geq 0$ e che la disuguaglianza è stretta se $a, b \in (0, 1)$

e $k > 1$. Infatti

$$\begin{aligned} F(a,b) &= (1-a)^k((1-b)^k-1) + b(1-a)\sum_{j=0}^{k-1}(1-ab)^j(1-b)^{k-1-j} \\ &= b(1-a)\sum_{j=0}^{k-1}(1-ab)^j(1-b)^{k-1-j} - (1-a)^k b\sum_{j=0}^{k-1}(1-b)^j \\ &= b(1-a)\left(\sum_{j=0}^{k-1}(1-b)^j\left((1-ab)^{k-j-1}-(1-a)^{k-1}\right)\right) \geq 0 \end{aligned}$$

dal momento che

$$(1-ab)^{k-1-j} \geq (1-a)^{k-1-j} \geq (1-a)^{k-1}$$

e la prima disuguaglianza è stretta se $b \neq 1$.

Terminiamo mostrando l'asserto per induzione su n; per $n = 1$ $g_1(a_1) = 0$ pertanto la proposizione è verificata. Se vale per $n-1$ allora

$$G_n(a_1,\ldots,a_n) = (1-(1-a_n)^k)G_{n-1}(a_1,\ldots,a_{n-1}) + F(\prod_{i=1}^{n-1}a_i, a_n) > 0$$

poiché $\prod_{i=1}^{n-1} a_i, a_n \in (0,1)$ e quindi $F(\prod_{i=1}^{n-1} a_i, a_n) > 0$.

Nel caso generico basta osservare che, detta A_{ij} la probabilità che il componente nella riga i e colonna j funzioni, allora evidentemente si ha che la probabilità che il primo sistema funzioni è $\mathbb{P}\left(\bigcap_i \bigcup_j A_{ij}\right)$, mentre quella del secondo sistema è $\mathbb{P}\left(\bigcup_j \bigcap_i A_{ij}\right)$. Facilmente $\bigcap_i \bigcup_j A_{ij} \supseteq \bigcup_j \bigcap_i A_{ij}$ da cui si ha che l'affidabilità del primo sistema non è inferiore a quella del secondo.

Osservazione. Un utile esercizio sulla teoria degli insiemi è quello di provare a dimostrare le seguenti leggi di De Morgan generalizzate (si utilizzi l'assioma della scelta). Sia $\{A_{i,j}\}_{i\in I, j\in J}$ una collezione di insiemi; allora

$$\bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in J} A_{i,j} = \bigcup_{f\in J^I}\bigcap_{i\in I} A_{i,f(i)} \qquad \bigcup_{i\in I}\bigcap_{j\in J} A_{i,j} = \bigcap_{f\in J^I}\bigcup_{i\in I} A_{i,f(i)}$$

dove J^I è l'insieme delle funzioni definite su I a valori in J. Si osservi che vale inoltre

$$\bigcap_{i\in I}\bigcap_{j\in J} A_{i,j} = \bigcap_{j\in J}\bigcap_{i\in I} A_{i,f(i)} \qquad \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J} A_{i,j} = \bigcup_{j\in J}\bigcup_{i\in I} A_{i,f(i)}.$$

Soluzione esercizio 8.

Mostriamo che se $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ è uno spazio di probabilità con $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n \ldots\}$ spazio campionario discreto ed esiste una successione di eventi indipendenti ed ognuno di probabilità $1/2$ allora $P(\{\omega_i\}) = 0$, per ogni $i \in \mathbb{N}$. Ciò è assurdo e quindi abbiamo concluso.

1. Mostrare che $P(\{\omega_i\}) = 0$, per ogni $i \in \mathbb{N}$ equivale a mostrare che per ogni $\varepsilon > 0$, per ogni $i \in \mathbb{N}$: $P(\{\omega_i\}) < \varepsilon$.

2. Fissiamo un $\varepsilon > 0$ e troviamo $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{1}{2^{\bar{n}}} < \varepsilon$.

3. Notiamo che anche la successione $A_1^c, \dots, A_n^c, \dots$ è formata da eventi indipendenti (indipendenti anche dagli $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$) e di probabilità $1/2$. Costruiamo degli insiemi nel modo seguente:

$$B_k = C_1 \cap \dots \cap C_{\bar{n}}$$

dove $C_i = A_i$ oppure $C_i = A_i^c$, per ogni $i = 1, \dots, \bar{n}$.

4. È facile mostrare che la famiglia dei $\{B_k\}_{k=1,\dots 2^{\bar{n}}}$ ha le seguenti proprietà:

   - $B_h \cap B_k = \emptyset$, $\forall h \neq k$;
   - $\cup_{k=1}^{2^{\bar{n}}} B_k = \Omega$.

5. Allora per ogni $i \in \mathbb{N}$ esiste un unico $k = k(i)$ tale che $\{\omega_i\} \subset B_{k(i)}$, quindi per la proprietà di monotonia della probabilità:

$$P(\{\omega_i\}) \leq P(B_{k(i)}) = 2^{-\bar{n}} < \varepsilon$$

Per l'arbitrarietà della scelta di ε abbiamo concluso.

Sia $([0,1], \Sigma_{[0,1]}, m)$ lo spazio con la misura di Lebesgue e siano

$$A_n := \bigcup_{i=0}^{2^{n-1}} \left[\frac{i}{2^{n-1}}, \frac{2i+1}{2^n} \right].$$

Presa una qualsiasi successione (strettamente) crescente di interi $\{n_i\}_{i=1}^{+\infty}$ è facile dimostrare per induzione su k che

$$\bigcap_{i=1}^{k} A_{n_i} = \cup_{i\in I_k} \left[\frac{i}{2^{k-1}}, \frac{2i+1}{2^k} \right]$$

(dove l'unione è ovviamente disgiunta) per un'opportuna scelta di I_k. Inoltre se $m > n_k$ allora $\left[\frac{i}{2^{n-1}}, \frac{2i+1}{2^n}\right] \cap A_m$ è l'unione disgiunta di 2^{m-n_k-1} intervalli di lunghezza $1/2^m$ pertanto $m\left(\bigcap_{i=1}^k A_{n_i}\right) = 1/2^k = \prod_{i=1}^k m(A_{n_i})$ da cui l'indipendenza.

Soluzione esercizio 9.

Osserviamo che se $f : I \to \{0,1\}$ (cioè se $f \in \{0,1\}^I$) allora

$$\{A_i\}_{i\in I} \text{ sono indipendenti } \iff \{A_f(i)\}_{i\in I} \text{ sono indipendenti}$$

dove

$$A_f(i) := \begin{cases} A_i & f(i) = 1 \\ \Omega \setminus A_i & f(i) = 0. \end{cases}$$

Allora senza perdita di generalità possiamo considerare solo il caso $\alpha_i = p_i$ per ogni $i \in \mathbb{N}$.

osserviamo ancora che per ogni successione $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ in $[0,1]$ sono equivalenti

(i) $\sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i < +\infty$,

(ii) $\prod_{i=1}^{+\infty}(1-\alpha_i)$.

Infatti essendo $1-\alpha_i \le \exp(-\alpha_i)$, se $\sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_1 = +\infty$ allora

$$\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i) \le \exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right) \to 0 \quad \text{se } n \to +\infty.$$

Viceversa essendo

$$\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n}\log(1-\alpha_i)\right)$$

dalla continuità della funzione esponenziale, basta studiare $\lim_{n\to+\infty}\log(1-\alpha_i)$. Dato che $\alpha_i \to 0$ allora $\log(1-\alpha_i) \sim -\alpha_i$ e poiché le due successioni sono con segno definitivamente costante, si ha che

$$\sum_{i=1}^{n}\log(1-\alpha_i) \text{ converge se e solo se } \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \text{ converge.}$$

Pertanto $\sum_{i=1}^{+\infty}\alpha_i < +\infty$ implica $\prod_{i=1}^{+\infty}(1-\alpha_i) = \exp\left(\sum_{i=1}^{+\infty}\log(1-\alpha_i)\right) > 0$.

1. Sia $\Omega = \cup_{i\in\mathbb{N}}\{\omega_i\}$. Se esistesse una tale successione di eventi indipendenti, poiché $\{f(A)\}_{f\in\{0,1\}}$ è una partizione di Ω (con $f(A) := \cap_{i\in I}A_f(i)$), allora per ogni $\omega \in \Omega$ esisterebbe $f_\omega : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ tale che $\omega \in f_\omega(A)$ e quindi

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) \le \mathbb{P}(f_\omega(A)) = \prod_{i\in\Omega}\mathbb{P}(A_{f_\omega}(i)) \le \prod_{i\in\mathbb{N}}(1-\alpha_i) = 0.$$

   Ma questo è assurdo poiché

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \sum_{i=1}^{+\infty}\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = 0.$$

2. Sia

$$\Omega := \{f : \mathbb{N} \to \{0,1\} : \exists n_0 : \forall i \ge n_0, f(i) = 0\};$$

   poiché

$$\Omega = \cup_{i=1}^{+\infty}\{f : \mathbb{N} \to \{0,1\} : \forall j \ge i, f(j) = 0\}$$

   e

$$\mathrm{card}\left(\{f : \mathbb{N} \to \{0,1\} : \forall j \ge i, f(j) = 0\}\right) = 2^i$$

si ha che Ω è numerabile. Si ricordi che in uno spazio di probabilità discreto, la misura di probabilità

è univocamente determinata a partire dai suoi valori sui singoletti $\mathbb{P}(\{\omega\})$ in quanto dalla numerabile additività, $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\})$. Definiamo pertanto

$$\mathbb{P}(\{f\}) := \prod_{i \in \mathbb{N}} (f(i)\alpha_i + (1 - f(i))(1 - \alpha_i))$$

che converge per ogni $f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Sia

$$A_i := \{f \in \Omega : f(i) = 1\};$$

calcoliamo $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) &= \mathbb{P}\left(\{f \in \Omega; f(i_1) = \cdots = f(i_k) = 1\}\right) \\
&= \sum_{f : f(i_1) = \cdots = f(i_k) = 1} \prod_{i \in \mathbb{N}} (f(i)\alpha_i + (1 - f(i))(1 - \alpha_i)) \\
&= \alpha_{i_1} \cdot \cdots \cdot \alpha_{i_k} \sum_{f : f(i_1) = \cdots = f(i_k) = 1} \prod_{i \notin \{i_1, \cdots, i_k\}} (f(i)\alpha_i + (1 - f(i))(1 - \alpha_i)) = (*).
\end{aligned}$$

Se togliamo gli elementi $\{\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_k}\}$ della successione $\{\alpha_i\}$ otteniamo una nuova successione $\{\beta_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ pertanto

$$(*) = \alpha_{i_1} \cdot \cdots \cdot \alpha_{i_k} \sum_{f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}} \prod_{i \in \mathbb{N}} (f(i)\alpha_i + (1 - f(i))(1 - \alpha_i)),$$

mostriamo per induzione su n che

$$\sum_{f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}} \prod_{i \geq n} (f(i)\alpha_i + (1 - f(i))(1 - \alpha_i)) = \sum_{f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}} \prod_{i \in \mathbb{N}} (f(i)\alpha_i + (1 - f(i))(1 - \alpha_i)) =;$$

infatti, da note proprietà della teoria della misura,

$$\begin{aligned}
&\sum_{f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}} \prod_{i \geq n} (f(i)\alpha_i + (1 - f(i))(1 - \alpha_i)) \\
&\qquad = \sum_{f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : f(n) = 1} \prod_{i \geq n} (f(i)\alpha_i + (1 - f(i))(1 - \alpha_i)) \\
&\qquad + \sum_{f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : f(n) = 0} \prod_{i \geq n} (f(i)\alpha_i + (1 - f(i))(1 - \alpha_i)) \\
&\qquad = \beta_n \sum_{f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}} \prod_{i \geq n+1} (f(i)\alpha_i + (1 - f(i))(1 - \alpha_i)) \\
&\qquad + (1 - \beta_n) \sum_{f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} :} \prod_{i \geq n+1} (f(i)\alpha_i + (1 - f(i))(1 - \alpha_i)) \\
&\qquad = \sum_{f \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}} \prod_{i \geq n+1} (f(i)\alpha_i + (1 - f(i))(1 - \alpha_i)).
\end{aligned}$$

Poiché $\prod_{i=1}^{n}(f(i)\beta_i+(1-f(i))(1-\beta_i))$ converge allora per note proprietà (simili a quelle delle serie)

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{i\geq n}(f(i)\alpha_i+(1-f(i))(1-\alpha_i))=1$$

da cui, essendo la successione costante, si ha che

$$\prod_{i\geq n}(f(i)\alpha_i+(1-f(i))(1-\alpha_i))=1,\quad \forall n$$

pertanto

$$\mathbb{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k})=\alpha_{i_1}\cdot\cdots\cdot\alpha_{i_k}$$

e come caso particolare $\mathbb{P}(A_i)=\alpha_i$ ed infine

$$\mathbb{P}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k})=\mathbb{P}(A_{i_1})\cdots\mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Soluzione esercizio 10.

Per la prima parte proponiamo due soluzioni, la prima utilizza il concetto di indipendenza mentre la seconda utilizza il principio di inclusione-esclusione. Possiamo scegliere come spazio campionario $\Omega=\{1,\dots n\}$; lo spazio probabilizzabile $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega))$ è dotato della probabilità uniforme. Facciamo le seguenti osservazioni:

1. Sia la scomposizione in fattori primi di n

$$n=\prod_{i=1}^{k}p_i^{a_i},$$

quindi

$$\{K \text{ non ha fattori in comune con } n\}=\{K \text{ non è multiplo di } p_i\ (i\in\{1,\dots,k\})\}.$$

Poniamo $E_i=\{1\leq h\leq n : h \text{ è multiplo di } i\}$, per $1\leq i\leq n$, allora:

$$\{K \text{ non ha fattori in comune con } n\}=\cap_{i=1}^{k}E_{p_i}^{c}.$$

È facile mostrare che, se j divide n, allora $P(E_j)=\frac{\frac{n}{j}}{n}=\frac{1}{j}$.

Pertanto se $\{j_i\}_{i=1}^{l}$ sono primi a due a due e dividono n allora $\{E_{j_i}\}_{i=1}^{l}$ formano una famiglia di eventi indipendenti e $P(E_{j_i})=\frac{1}{j_i}$, per $i=1,\dots,l$.

Infine possiamo concludere che:

$$P(\{K \text{ non ha fattori in comune con } n\})=\prod_{i=1}^{k}P(E_{p_i}^{c})=\prod_{i=1}^{k}(1-\frac{1}{p_i}).$$

2. Sia E_i come al punto precedente

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\cap_{i=1}^k E_i^c) &= 1 - \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_j \le k} \mathbb{P}(\cap_{l=1}^j E_{p_{i_j}}) \\ &= 1 - \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_j \le k} \frac{1}{p_{i_1} \cdots p_{i_j}} = \prod_{i=1}^k (1 - \frac{1}{p_i}).\end{aligned}$$

Per la seconda parte

1. SI osservi che $\prod_i (1-p_i) = 0$ se e solo se $\sum_i \log(1-p_i) = -\infty$. Se ora $\log(1-p_i) \not\to 0$ allora $\prod_i (1-p_i) = 0$ e chiaramente $\sum_i p_i = +\infty$. Se invece $\log(1-p_i) \to 0$ allora $p_i \to 0$ e quindi si ha che $\log(1-p_i) \sim -p_i$ da cui $\sum_i (-p_i)$ ha lo stesso carattere della serie $\sum_i \log(1-p_i)$. Quindi alla fine
$$\sum_i p_i = +\infty \iff \sum_i \log(1-p_i) = -\infty \iff \prod_i (1-p_i) = 0.$$

2. Si osservi che, dall'esistenza ed unicità della scomposizione in fattori primi e dal teorema di convergenza monotona
$$+\infty = \sum_{n=1}^{\infty} = \prod_{p \text{ primi}} \sum_{i=0}^{\infty} p^i = \left(\prod_{p \text{ primi}} (1 - 1/p) \right)^{-1}.$$
Quindi $\prod_{p \text{ primi}} (1-1/p) = 0$ e, dal punto precedente, si ha $\sum_{p \text{ primi}} 1/p = +\infty$.

Soluzione esercizio 11.

Abbiamo che
$$p_{n,2n} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \frac{1}{2^{2n}} = \sum_{k=0}^{n-1} P(\text{ avere k successi in 2n prove di Bernoulli }).$$

- Per simmetria, trattandosi del lancio di una moneta equilibrata:
$$\begin{aligned}&P(\text{avere un numero maggiore di n di successi in 2n prove}) = \\ &\qquad P(\text{avere un numero minore di n di successi in 2n prove})\end{aligned}$$

- Inoltre $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \frac{1}{2^{2n}} = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^{2n} = 1$.

Quindi
$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \frac{1}{2^{2n}} + \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} + \sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k} \frac{1}{2^{2n}} = 2p_{n,2n} + \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} = 1$$

da cui,

$$p_{n,2n} = \frac{1}{2}(1 - \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}}) < \frac{1}{2} \qquad \forall n \geq 1$$

Questo conclude la prima parte.

Per quanto riguarda la seconda, utilizziamo la formula di Stirling: $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{\sqrt{n}\frac{n^n}{e^n}} = \sqrt{2\pi}$.

Abbiamo che:

$$\lim_{n\to+\infty} \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}} = 0$$

e quindi:

$$\lim_{n\to+\infty} p_{n,2n} = \frac{1}{2}$$

Soluzione esercizio 12.

1. Sia $\{X_i\}_{i=1}^n$ un generico processo di Bernoulli di parametro p, $E_i = \{$il risultato dell'i-esimo lancio è un successo $\}$ e $A \subset \mathbb{N}^*$, allora

   $$\mathbb{P}(\cup_{i\in A} E_i) = \sum_{i\in A} \mathbb{P}(E_i) = \sum_{i\in A} \mathbb{P}(X_1 = 0, \ldots, X_i{-}1 = 0, X_i = 1) = \sum_{i\in A}(1{-}p)^{i-1}p.$$

   Un numero k dispari è della forma $k = 2n{+}1$ per un qualche $n \in \mathbb{N}$, allora

   $$P(\text{Il primo successo arriva all'istante } 2n+1\ ) = \frac{1}{2^{2n+1}}$$

   Quindi:

   $$P(\text{ Il primo successo arriva ad un istante dispari }) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2} * \frac{4}{3} = \frac{2}{3}.$$

2. Abbiamo che $\frac{3}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$, allora è sufficiente scegliere $A = \{2, 3\}$, infatti la probabilità di ottenere il primo successo all'istante 2 o all'istante 3 è la seguente:

   $$\begin{aligned} P(\text{ Il primo successo arriva all'istante 2 o all'istante 3}) &= P(E_1^c \cap E_2) + P(E_1^c \cap E_2^c \cap E_3) \\ &= P(E_1^c)P(E_2) + P(E_1^c)P(E_2^c)P(E_3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \end{aligned}$$

3. In generale se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ è una sequenza di eventi disgiunti tali che $\mathbb{P}(E_i) = 1/2^i$ per ogni $i \in \mathbb{N}^*$ allora, scelto $\alpha \in [0, 1]$, è possibile scegliere $A \subseteq \mathbb{N}^*$ tale che $\mathbb{P}(\cup_{i\in A} E_i) = \alpha$; la costruzione di A è la seguente: sia $i_0 := 1$ e

   $$i_1 := \min\{n \geq i_0 : 1/2^n \leq \alpha\}, \quad \alpha_1 := \alpha - 1/2^{i_1},$$

e iterativamente

$$i_{n+1} := \min\{n \geq i_n : 1/2^n \leq \alpha_n\}, \quad \alpha_{n+1} := \alpha_n - 1/2^{i_n},$$

non è difficile mostrare per induzione che

$$\alpha_n = \alpha - \sum_{j=1}^{n} 1/2^{i_j} \leq 1/2^{i_n}$$

da cui, se $A := \cup_{j \in \mathbb{N}^*} \{i_j\}$, si ha che $\sum_{i \in A} 1/2^i = \alpha$. .

Soluzione esercizio 13.

1. Sia $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ la successione di prove i.i.d. di Bernoulli di parametro p che governano i successi. Osserviamo che se $N := \min\{i : X_i = 1\}$ (al solito $\min(A) := +\infty$ se e solo se $A = \emptyset$) allora dobbiamo calcolare $\mathbb{P}(N = i)$ dove vale l'uguaglianza $\{N = i\} = \{X_1 = 0, \ldots, X_{i-1} = 0, X_i = 1\}$ da cui, per l'indipendenza e l'identica distribuzione

   $$\mathbb{P}(X_1 = 0, \ldots, X_{i-1} = 0, X_i = 1) = p(1-p)^{i-1},$$

   con la convenzione $0^0 := 1$. Si osservi che

   $$\mathbb{P}(N = +\infty) = \lim_{i \to +\infty} \mathbb{P}(N > i) = \begin{cases} \lim_{i \to +\infty} (1-p)^i = 0 & p \in [0,1) \\ 0 & p = 1, \end{cases}$$

   pertanto N è quasi certamente finito e la distribuzione (abbiamo appena verificato che di distribuzione si tratta) viene chiamata *geometrica*.

   Alternativamente si può osservare che, se $p = 1$ allora $\mathbb{P}(N = 1) = 1$ e se $p \in [0,1)$ allora

   $$\begin{aligned} \mathbb{P}(N < +\infty) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N = i) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} p(1-p)^{i-1} \\ &= \lim_{n \to +\infty} p \frac{1-(1-p)^n}{p} = 1. \end{aligned}$$

2.

   $$\mathbb{P}(N \geq i) = \mathbb{P}(X_1 = X_2 = \cdots = X_i = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0) \cdots \mathbb{P}(X_i = 0) = (1-p)^i.$$

3. Si osservi che se $\{Y_i\}_{i \in I}$ sono indipendenti e se $\{I_k\}_{k \in K}$ sono sottoinsiemi a due a due disgiunti di I, allora dati degli eventi $\{E_k\}_{k \in K}$ tali che E_k "dipende" (cioè "si esprime in funzione di") da $\{X_j\}_{j \in E_k}$ si ha che tali eventi costituiscono una famiglia di eventi indipendenti.

Nel nostro caso l'evento $\{N = i\}$ si esprime in funzione di $\{X_1, \ldots, X_i\}$ ($\{N = i\} = \{X_1 = 0, \ldots, X_i = 0\}$) ed è quindi indipendente dall'evento $\{X_n = 1\}$ se $n > i$, pertanto

$$\mathbb{P}(N = i|X_n) = \begin{cases} \mathbb{P}(N = i) & i < n \\ \mathbb{P}(N = i)/\mathbb{P}(X_n = 1) = (1-p)^{i-1} & i = n \\ 0 & i > n. \end{cases}$$

4. Siano
   A_i:="il primo successo è alla i-esima prova"
   B:="il k-esimo successo è all'n-esima prova". Allora

$$\mathbb{P}(B|A_i) = \begin{cases} \binom{n-1-i}{k-2} p^{k-1}(1-p)^{n-i-k+1} & n - i \ge k - 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   cioè è la probabilità di avere $k-2$ successi in $n-1-i$ tentativi (dall'$i+1$-esimo all'$n-1$-esimo compresi). inoltre $\mathbb{P}(A_i) = (1-p)^{i-1}p$ e $\mathbb{P}(B) = \binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}$ (che è la probabilità di avere $k-1$ successi nei primi $n-1$ tentativi ed uno nell'ultimo). Pertanto, dalla formula di Bayes,

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\binom{n-1-i}{k-2}}{\binom{n-1}{k-1}} = \frac{(n-i-1)!(n-k+1)!}{(n-i-k+1)!(n-1)!}(k-1).$$

   Nel caso particolare $k = 2$ allora $\mathbb{P}(A_i|B) = 1/(n-1)$ che è la distribuzione uniforme sui primi $n-1$ tentativi.

Soluzione esercizio 14.

Osserviamo innanzitutto che la variabile N è ben definita a valori in $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ e notiamo che l'evento $\{N \ge i\} = \cup_{j=1}^{i-1}\{X_j = 0\}$.

1. Utilizzando l'ipotesi di indipendenza e di ugual distribuzione

$$\mathbb{P}(N \ge i) = \prod_{i=1}^{i-1} \mathbb{P}(X_i = 0) = (1-p)^{i-1}.$$

2. Evidentemente $\mathbb{P}(N = +\infty) = 1 - \mathbb{P}(N \in \mathbb{N}) = 1 - \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N = i)$ (primo modo per calcolare la grandezza richiesta); tuttavia, per la proprietà di σ-additività della misura di probabilità si ha anche

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N = +\infty) &= \mathbb{P}(\cap_{i=1}^{+\infty}\{N \ge i\}) = \lim_{i\to+\infty} \mathbb{P}(\cap_{j=1}^{i}\{N \ge j\}) \\ &= \lim_{i\to+\infty} \mathbb{P}(N \ge i) = \begin{cases} 0 & p > 0 \\ 1 & p = 0, \end{cases}\end{aligned}$$

   dove si è utilizzato il risultato esplicito del punto precedente.

3.
$$\mathbb{P}(N=i)=\mathbb{P}(N\geq i)-\mathbb{P}(N\geq i+1)=p(1-p)^{i-1}, \qquad i\in\mathbb{N}^*.$$

4. Dalla formula
$$\mathbb{E}(N)=\int_0^{+\infty}(1-F_N(t))\mathrm{d}t-\int_{-\infty}^0 F_N(t)\mathrm{d}t\equiv\sum_{i=1}^{+\infty}\mathbb{P}(N\geq i)$$
si ha facilmente
$$\mathbb{E}(N)=\sum_{i=1}^{+\infty}(1-p)^{i-1}=\begin{cases}1/p & p>0\\ +\infty & p=1.\end{cases}$$

Soluzione esercizio 15.
Si osservi che (4) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (1) e (4) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (1), pertanto basta mostrare (4). Inoltre, essendo X al più numerabile anche X^n lo è (per ogni $n\in\mathbb{N}$) e quindi X_0 è numerabile. Si definisca $A_{y,i}:=\{(X_{i+1},\ldots,X_{i+l(y)}=y\}$, si ha che $\{A_{y,i\cdot l(y)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ sono indipendenti (per ogni $y\in X_0$ fissato) e $\mathbb{P}(A_{y,i})=\prod_{j=1}^{l(y)}p_{y_j}=\alpha_y>0$. Dal Lemma di Borel-Cantelli si ha
$$1=\mathbb{P}(\limsup_i A_{y,i\cdot l(y)})\leq\mathbb{P}(\limsup_i A_{y,i})\leq 1.$$
Per il punto (5) si ha $N(\omega)=\min\{i\in\mathbb{N}:\omega\in A_{y,i}\}+l(y)$; definito $N_1(\omega):=\min\{i\in\mathbb{N}:\omega\in A_{y,i\cdot l(y)}\}+l(y)$ allora $l(y)\cdot\mathbb{E}(N_1)\geq\mathbb{E}(N)$; da cui, essendo $\mathbb{E}(N_1)$ la media di un processo di Bernoulli con parametro $\prod_{j=1}^{l(y)}p_{y_j}$, si ha l'asserto.

Osservazione: utilizzando tecniche più raffinate, si può mostrare che, definito
$$I:=\{i=1,\ldots,l(y):y_j=y_{l(y)-i+j},\forall j=1,\ldots,i\}$$
(ovviamente $l(y)\in I$), allora
$$\mathbb{E}(N)=\sum_{i\in I}\prod_{j=1}^{i}p_{y_j}$$

Soluzione esercizio 16.
Introduciamo i seguenti eventi: $M=$ "la persona in questione è malata", $I_1=$"Il primo test risulta positivo" e $I_2=$"Il secondo test risulta positivo" . Allora abbiamo che:

- $P(M)=0.01$
- $P(I_1|M^c)=0.05=P(I_2|M^c)$
- $P(I_1^c|M)=0.2=P(I_2^c|M)$.

Inoltre non ci sono ragioni per non ritenere l'affidabilità e la sensibilità dei due test indipendenti (così come erano ritenuti indipendenti i comportamenti di Arturo e Bianca nell'esercizio 5): supporremo pertanto che I_1, I_2 (e quindi I_1^c, I_2^c) siano condizionatamente indipendenti dato M^c ed I_1^c, I_2^c (e quindi I_1, I_2) siano condizionatamente indipendenti dato M. Alla luce di queste osservazioni risolviamo l'esercizio.

1. Applichiamo il Teorema delle probabilità totali a $I_1 \cap I_2$, abbiamo:

$$\mathbb{P}(I_1 \cap I_2) = \mathbb{P}(I_1 \cap I_2|M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(I_1 \cap I_2|M^c)\mathbb{P}(M^c) = \mathbb{P}(I_1|M)\mathbb{P}(I_2|M)\mathbb{P}(M)$$
$$+ \mathbb{P}(I_1|M^c)\mathbb{P}(I_2|M^c)\mathbb{P}(M^c) = (0.8)^2 \cdot 0.01 + (0.05)^2 \cdot 0.99 = 8.875 \cdot 10^{-3}$$

2. Applicando il Teorema di Bayes abbiamo che:

$$\mathbb{P}(M|I_1 \cap I_2) = \frac{\mathbb{P}(I_1 \cap I_2|M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(I_1 \cap I_2)} = \frac{\mathbb{P}(I_1|M)\mathbb{P}(I_2|M)P(M)}{\mathbb{P}(I_1 \cap I_2)} = \frac{(0.8)^2 \cdot 0.01}{8.875 \cdot 10^{-3}} = \frac{6.4}{8.875} \sim 72.11\%$$

3. $\mathbb{P}((I_1 \cap I_2)^c|M) = 1 - \mathbb{P}(I_1 \cap I_2|M) = 1 - \mathbb{P}(I_1|M)\mathbb{P}(I_2|M) = 1 - (0.8)^2 = 0.36 = 36\%$. D'altra parte

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M|(I_1 \cap I_2)^c) &= \frac{\mathbb{P}(M \cap (I_1 \cap I_2)^c)}{\mathbb{P}((I_1 \cap I_2)^c)} = \frac{\mathbb{P}(M) - \mathbb{P}(M \cap I_1 \cap I_2)}{1 - \mathbb{P}((I_1 \cap I_2))} \\ &= \frac{\mathbb{P}(M) - \mathbb{P}(I_1 \cap I_2|M)\mathbb{P}(M)}{1 - \mathbb{P}((I_1 \cap I_2))} = \frac{0.01(1 - 0.8^2)}{1 - 8.8975 \cdot 10^{-3}} = 6.457 \cdot 10^{-3}.\end{aligned}$$

4. Innanzitutto calcoliamo $\mathbb{P}(I_1) = \mathbb{P}(I_1|M^c)(1-\mathbb{P}(M))+(1-\mathbb{P}(I_1^c|M))\mathbb{P}(M) = 0.0575$. Calcoliamo quindi $\mathbb{P}(M|I_1) = (1 - \mathbb{P}(I_1^c|M)\mathbb{P}(M)/\mathbb{P}(I_1) = 8 \cdot 10^{-3}/0.0575 = 0.1391$ che confrontiamo con $\mathbb{P}(M|I_1 \cap I_2) = 0.7211$, quindi aumenta la certezza di essere malati con la procedura a due test rispetto a quella con il singolo test.

   Calcoliamo quindi $\mathbb{P}(M^c|I_1^c) = 1 - \mathbb{P}(I_1^c|M)\mathbb{P}(M)/(1 - \mathbb{P}(I_1)) = 1 - 0.2 \cdot 0.01/(1 - 0.0575) = 0.9979$ da confrontarsi con $\mathbb{P}(M^c|(I_1 \cap I_2)^c) = 1 - \mathbb{P}(M|(I_1 \cap I_2)^c) = 1 - 6.457 \cdot 10^{-3} = 0.9935$, quindi, come ci si aspetta, la probabilità di essere sani se si è dimessi peggiora un po' nel caso del doppio test.

   Osserviamo ora che $\mathbb{P}(I_1|M^c) = 0.05$ mentre $\mathbb{P}(I_1 \cap I_2|M^c) = \mathbb{P}(I_1|M^c)^2 = 2.5 \cdot 10^{-3}$ quindi aumenta la probabilità di non essere curati se si è sani.

   Infine $\mathbb{P}(I_1|M) = 1 - \mathbb{P}(I_1^c|M) = 0.8$ mentre $\mathbb{P}(I^1 \cap I_2|M) = \mathbb{P}(I_1|M)^2 = (1 - \mathbb{P}(I_1^c|M))^2 = 0.64$ quindi diminuisce la probabilità di essere curati se si è malati.