5 Esercitazione 5: / /

5.1 Funzioni di ripartizione e densità di probabilità.

Esercizio 1 *Sia T_1 l'istante del primo successo di un processo di Bernoulli di parametro p. Sia A l'evento " il secondo successo avviene alla 13-esima prova":*

1. *determinare $\mathbb{P}(T_1 = x|A) = p(x)$ al variare di $x \in \mathbb{R}$;*
2. *verificare che la funzione p è una densità di probabilità su $S = \{x \in \mathbb{R} : p(x) \neq 0\}$.*

Esercizio 2 *Due dadi equilibrati vengono lanciati su un tavolo e si osservano i valori delle facce supariori. Sia X il valore assoluto della differenza fra i due numeri che appaiono.*

1. *Determinare e disegnare le densità di X.*
2. *Determinare la funzione di ripartizione di X.*
3. *Con quale probabilità i due numeri differiscono al più di tre unità?*
4. *Con quale probabilità i due numeri differiscono almeno di tre unità?*

Esercizio 3 *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x(x+1)(x+2)} & \text{se } x \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si determini c in modo che f sia una densità di probabilità su $\mathbb{N}^*$ e calcolarne la funzione di ripartizione.

Esercizio 4 *Sia $\rho_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la seguente funzione*

$$\rho_c(x) := \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)\lambda \exp(-\lambda x) + (1-c)x^2 \mathbb{1}_{(0,1)}(x),$$

(si considera implicita la dipendenza da $\lambda > 0$).

1. *Determinare per quali valori del parametro $c \in \mathbb{R}$, la funzione ρ_c è una densità. In corrispondenza a tali valori sia X_c la variabile individuata (in tutti i punti successivi ci limiteremo a questi valori);*
2. *calcolare media, varianza e la funzione di ripartizione F_{X_c};*

3. *dati due numeri positivi* t, s*, calcolare* $\mathbb{P}(X_c \geq t | X \geq s)$*;*

4. *calcolare, in corrispondenza ad un generico* $\alpha \in (0, +\infty)$ *un valore* s_α *(se esiste) tale che* $\mathbb{P}(X_c \leq s_\alpha) = \alpha$*;*

5. *si definisca*

$$Y_c := \begin{cases} \log(X_c) & X_c > 0 \\ 0 & X_c \leq 0 \end{cases}$$

   si calcoli la funzione di ripartizione e la densità (se esiste) della variabile Y_c*;*

6. *calcolare, per ogni* $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_c^n)$.

Esercizio 5 *Un test a risposta multipla (di cui una sola è corretta) è costituito da tre domande; alla prima sono abbinate quattro possibili risposte e alle ultime due domande sono abbinate cinque possibili risposte. Uno studente impreparato sceglie a caso una risposta.*

1. *Determinare la densità di probabilità e la funzione di ripartizione della variabile aleatoria indicante il numero di risposte corrette.*

2. *Qual è la probabilità che lo studente risponda almeno ad una domanda correttamente?*

3. *Per passare il test lo studente deve rispondere correttamente almeno a 2 domande. Con quale probabilità non passerà il test?*

Esercizio 6 *Un' urna contiene* 12 *palline etichettate da* 1 *a* 12*. Vengono eseguite due estrazioni in successione e con rimpiazzo. Sia* X *la v.a. che corrisponde al numero più alto estratto. Si determini la densità di* X *(*X *restituisce il numero maggiore o uguale fra i due numeri estratti).*

Esercizio 7 ** *Siano* $X_1, \ldots X_n$ *variabili indipendenti ed identicamente distribuite. Sia, per ogni* $\omega \in \Omega$*, una disposizione* σ_ω *tale che*

$$X_{\sigma_\omega(1)}(\omega) \leq X_{\sigma_\omega(2)}(\omega) \leq \cdots \leq X_{\sigma_\omega(n)}(\omega)$$

e si definiscano $Y_i(\omega) := X_{\sigma_\omega(i)}(\omega)$ *per ogni* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$*. Chiameremo questa sequenza di variabili ordinamento di* $X_1, \ldots, X_n$*.*

1. *Mostrare che* $Y_1, \ldots, Y_n$ *sono variabili aleatorie.*

2. *Calcolare la funzione di ripartizione di* Y_i *per* $i = 1, \ldots, n$*.*

5.2 Densità notevoli

Esercizio 8 *In una città ci sono* 8 *stazioni di rifornimento, di cui* 3 *sono self-service. Un automobilista ne sceglie a caso una per* 5 *giorni consecutivi.*

a) Calcolare la probabilità che capiti in un self-service esattamente 2 *volte.*

b) Calcolare la probabilità dello stesso evento supponendo però che l'automobilista non faccia mai rifornimento due volte nella stessa stazione.

Esercizio 9 *Nel gioco del lotto ad ogni estrazione settimanale* 5 *numeri vengono estratti simultaneamente da un urna che contiene* 90 *palline numerate da* 1 *a* 90*. Fissiamo un numero, ad esempio il* 67*, sia p la probabilità che esca in una singola estrazione.*

1. *Quanto vale p?*
2. *Qual è la probabilità che dopo* 30 *estrazioni il* 67 *non sia ancora uscito ?*
3. *Supponiamo che nelle prime* 100 *estrazioni il* 67 *non sia ancora uscito, qual è la probabilità che esca dopo la* 130 *esima estrazione ?*
4. *Se nelle prime* 10 *estrazioni il* 67 *è comparso* 2 *volte, con quale probabilità è comparso alle prime* 2 *estrazioni?*
5. *Se nelle prime* 10 *estrazioni il* 67 *è comparso* 2 *volte, con quale probabilità è comparso in almeno una delle prime* 2 *estrazioni?*
6. *Qual è la probabilità che esca almeno* 6 *volte nelle prime* 50 *estrazioni?*
7. *Con quale probabilità è necessario effettuare più di* 50 *estrazioni per veder comparire* 10 *volte il* 67*?*
8. *Se so che nelle prime* 40 *estrazioni è comparso il* 67 *nove volte, con quale probabilità è necessario effettuare più di* 50 *estrazioni per veder comparire* 10 *volte il* 67*?*

Esercizio 10 *Sia Y una v.a. distribuita con legge binomiale di parametri n e p, si trovino i punti di massimo per la sua densità di probabilità.*

Esercizio 11 *In una banca vi sono* 10 *sportelli; siano $X_1, \ldots, X_n$ il numero di persone presenti agli sportelli e si supponga che siano variabili aleatorie indipendenti con distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = 2$. Calcolare:*

1. *la probabilità che vi sia almeno una persona in banca;*
2. *il valor medio del numero di persone presenti in banca;*
3. *la probabilità che vi siano almeno 3 clienti al primo sportello sapendo che in ciascuno degli altri ve ne sono meno di 2;*
4. *la probabilità che almeno uno sportello sia libero.*

Esercizio 12 *In una certa provincia montuosa si può supporre che il numero X di frane al mese sia una variabile aleatoria con la legge di Poisson di parametro $\lambda = 2.3$.*

1. *Calcolare la probabilità che ci siano almeno due frane in un dato mese.*
2. *Quanto dovrebbe valere il parametro λ affinché la probabilità che in un mese non ci siano frane sia superiore a $1/2$?*

Esercizio 13 *Un canale di trasmissione dati può ricevere messaggi binari da due sorgenti diverse A e B con probabilità $\frac{1}{2}$ ciascuna. Ognuna delle due sorgenti produce messaggi in cui i bit successivi sono tra loro indipendenti. Per la sorgente A però i bit possono essere 1 o 0 con probabiltà $1/2$, mentre per B il valore 1 si verifica con probabilità $\frac{1}{4}$ e 0 con probabilità $3/4$. Un messaggio di lunghezza n viene ricevuto ed in esso si osserva una proporzione di 1 pari a 0.4.*

Supponiamo $n = 10$. Qual è la probabilità che si tratti della sorgente A? Quale delle due sorgenti è la più probabile? E se invece fosse $n = 100$?

Esercizio 14 *Un' urna contiene 10 palline numerate da 1 a 10. Si effettua un' estrazione senza rimpiazzo si 6 palline. Sia Y la variabile aleatoria che rappresenta il più alto dei numeri estratti e Z la v.a. che rappresenta il più basso dei numeri.*

1. *si determini la funzione di ripartizione di Y,*
2. *si determini la funzione di ripartizione di Z*

Esercizio 15 *Un'urna contiene 6 palline di cui 3 bianche, 2 rosse ed 1 nera. Si estraggono senza reimmissione tre palline e si vince se una delle tre è nera.*

1. *Calcolare la probabilità di vincere.*
2. *Calcolare la probabilità di vincere sapendo che la pallina nera non è uscita nelle prime due estrazioni.*
3. *Sapendo di aver vinto, qual è la probabilità che la pallina nera non sia uscita nelle prime due estrazioni?*

Esercizio 16 *Un'urna contiene 6 palline di cui 3 bianche, 2 rosse ed 1 nera. Si estraggono senza reimmissione tre palline e si vince se sono di colore differente.*

1. *Calcolare la probabilità di vincere.*
2. *Calcolare la probabilità di vincere sapendo che nelle prime due estrazioni sono uscite (non necessariamente nell'ordine) una rossa ed una bianca.*
3. *Calcolare la probabilità di vincere sapendo che la pallina nera non è uscita nelle prime due estrazioni (ma senza sapere cosa sia uscito nelle prime due).*

4. *Sapendo di aver vinto, qual è la probabilità che la pallina nera non sia uscita nelle prime due estrazioni?*

Esercizio 17 * *Sia* $\{X_i\}_{i=1}^{+\infty}$ *un processo di Bernoulli con parametro* p.

1. *Si calcoli la distribuzione dell'*n*-esimo successo.*
2. *Si calcoli la probabilità che l'*$n+m$*-esimo successo arrivi all'istante* $t+k$ *sapendo che l'*n*-esimo è avvenuto all'istante* t.
3. *Si calcoli la probabilità che l'*n*-esimo primo successo arrivi dopo l'*$t+k$*-esimo istante sapendo che avviene dopo il* t*-esimo istante.*

Esercizio 18 *Ad un centralino telefonico arrivano chiamate urbane o interurbane e con probabilità* $\frac{3}{10}$ *sono interurbane.*

1. *Calcolare la probabilità che la prima chiamata interurbana della giornata sia la terza o una delle successive.*
2. *Sapendo che le prime tre chiamate non sono state chiamate interurbane si calcoli la probabilità che le prime cinque non siano interurbane.*
3. *Sapendo che su* 10 *chiamate ci sono state* 2 *interurbane, si calcoli la probabilità che le prime* 2 *siano interurbane.*
4. *Supponiamo che ci siano* 2 *centralini ed una chiamata possa pervenire con probabilità* $1/2$ *a ciascuno di essi. Al centralino* a *una chiamata è interurbana con probabilità* $\frac{3}{10}$*, mentre al centralino* b *è interurbana con probabilità* $\frac{2}{7}$*. Viene ricevuta una chiamata interurbana, con quale probabilità è arrivata al centralino* a*? A quale centralino è più probabile che arrivi?*

Esercizio 19 *Supponiamo che in urna ci siano* 10 *palline di cui* 6 *rosse e* 4 *bianche. Si effettua un'estrazione senza reimmissione di* 5 *palline. Sia* E_k *l'evento* $\{$ *la* k *esima pallina estratta è rossa* $\}$.

1. *determinare le distribuzioni delle variabili aleatorie così definite:*

$$Y_k(\omega) = \begin{cases} 1 & se\ \omega \in E_k \\ 0 & se\ \omega \notin E_k \end{cases} \qquad per\ k = 1, \ldots, 5$$

   per ogni $k = 1, \ldots, 5$ *esse si possono interpretare come delle prove del* k*-esimo esperimento " estraggo una pallina dall' urna "che ha successo se il colore della pallina estratta e' rosso.*

2. *le prove* Y_k *sono indipendenti fra loro ?*
3. *qual è la probabilità che alla terza estrazione non sia stata ancora estratta una pallina rossa se le prime due palline estratte sono bianche?*

SOLUZIONI

Soluzione esercizio 1.

1. *T_1 può assumere solo valori interi maggiori di 0 e minori di 13, allora:*

$$p(x) = \mathbb{P}(T_1 = x|A) = \begin{cases} 0 & \textit{se } x \notin \{1,\dots,12\} \\ \frac{p^2(1-p)^{11}}{\binom{12}{1}p^2(1-p)^{11}} = \frac{1}{12} & \textit{se } x \in \{1,\dots,12\} \end{cases}$$

2. *Questo è ovvio dal momento che $\mathbb{P}(X_1 \in \mathbb{N}^*) = 1$ e che $\mathbb{P}(\cdot|A)$ è una misura di probabilità.*

   In ogni caso, volendo verificare, sappiamo che $S = \{1,\dots,12\}$ e che $p(x) \in [0,1]$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
   Inoltre: $\sum_{n=1}^{12} p(n) = \sum_{n=1}^{12} \frac{1}{12} = 1$. Quindi p è una densità su S.

Soluzione esercizio 2.

1. *Scegliamo come spazio campionario è $\Omega = \{(i,j) : i,j = 1,\dots 6\}$. La variabile X è $X((i,j)) = |i-j|$. Costruiamo la seguente matrice 6×6 tale che $a_{i,j} = |i-j|$:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Essa riporta i possibili valori di X. Abbiamo che:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X=0) &= \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \\ \mathbb{P}(X=1) &= \frac{10}{36} = \frac{5}{18} \\ \mathbb{P}(X=2) &= \frac{8}{36} = \frac{2}{9} \\ \mathbb{P}(X=3) &= \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \\ \mathbb{P}(X=4) &= \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \\ \mathbb{P}(X=5) &= \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \end{aligned}$$

2.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{6} & 0 \le x < 1 \\ \frac{4}{9} & 1 \le x < 2 \\ \frac{2}{3} & 2 \le x < 3 \\ \frac{5}{6} & 3 \le x < 4 \\ \frac{17}{18} & 4 \le x < 5 \\ 1 & 5 \le x \end{cases} \tag{1}$$

3. $\mathbb{P}(X \le 3) = F_X(3) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$.

4. $\mathbb{P}(X \ge 3) = 1 - F_X(2) = 1 - \frac{24}{36} = \frac{1}{3}$.

Soluzione esercizio 3.
Deve essere:
a) $c \ge 0$ *in modo che* $f(n) \ge 0$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}^*$*, (ma se c'è una soluzione questo è sempre verificato, visto che il segno di ogni termine è lo stesso di* c *e della somma su tutti i valori di* n*).*
b) deve valere la seguente identità:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = c \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = c \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{n(n+1)} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right] = \frac{c}{4} = 1$$

quindi $c = 4$.

Perciò:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x(x+1)(x+2)} & \textit{se } x \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \textit{altrove} \end{cases}$$

è una densità su $\mathbb{N}^*$*.*

La funzione di ripartizione è

$$F(x) := \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \sum_{i=1}^{[x]} \frac{4}{i(i+1)(i+2)} = 1 - \frac{2}{([x]+1)([x]+2)} & x \ge 1, \end{cases}$$

dove $[x]$ *è la parte intera di* $x \in \mathbb{R}$*.*

Osservazione. *(Per chi sa qualcosa di Teoria della Misura) Ricordiamo che una misura* μ *ammette densità rispetto ad una misura* ν *se e solo se esiste una funzione misurabile reale* f *tale che (i)* $\nu(f < 0) = 0$ *e che (ii)* $\mu(A) = \int_A f \mathrm{d}\nu$*; questo è equivalente a richiedere che per ogni insieme misurabile* A*, si abbia*

$\nu(A) = 0 \Longrightarrow \mu(A) = 0$ (assoluta continuità di μ rispetto a ν). La densità f è unica a meno di ν-equivalenze.

Inoltre f rappresenta una densità di probabilità rispetto ad una misura ν se e solo se (1) $\nu(f < 0) = 0$ e (ii) $\int f \mathrm{d}\nu = 1$.

In generale chiedere che una funzione sia una densità su un insieme al più numerabile M sottintende "rispetto alla misura del conteggio" (cioè $f|_M \geq 0$ e $\sum_{i \in M} f(i) = 1$), mentre chiedere che una funzione f sia una densità su un intervallo I (non necessariamente finito) di $\mathbb{R}$ sottintende "rispetto alla misura di Lebesgue" (cioè $f|_I \geq 0$ e $\int_I f(x)\mathrm{d}x = 1$.

Soluzione esercizio 4.

Ricordiamo che una funzione di ripartizione ammette densità (in senso di Lebesgue) se e solo se è assolutamente continua; una condizione sufficiente è che sia derivabile ovunque tranne al più in un insieme finito di punti dove però è continua (nel caso della densità in senso di Riemann una condizione sufficiente è che ammetta derivata ovunque tranne al più un insieme finito di punti dove però è continua e che la derivata sia Riemann-integrabile).

1. *Una funzione ρ è una densità se e solo se*

$$\begin{cases} \rho \geq 0 \\ \int_{\mathbb{R}} \rho(x)\mathrm{d}x = 1 \end{cases}$$

La seconda condizione implica

$$1 = \int_{\mathbb{R}} \rho_c(x)\mathrm{d}x = \frac{1-c}{3} + c$$

cioè $c = 1$; anche la prima condizione risulta verificata per tale valore. Da qui in poi chiamiamo $X := X_1$.

2.

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \rho(s)\mathrm{d}s = \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(s)(1 - \exp(-\lambda x)).$$

Per quanto riguarda il calcolo della media, ricordiamo i due metodi (il primo generale, il secondo necessita dell'esistenza della densità) per il calcolo, mettiamo solo il risultato e rimandiamo il lettore all' ultimo punto per i dettagli

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_0^{+\infty} (1 - F_X(t))\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{0} F_X(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{\mathbb{R}} t\rho(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda} \\ \mathrm{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - E(X)^2 &= \int_{\mathbb{R}} t^2\rho(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

3. *Se*

$$\mathbb{P}(X \geq t | X \geq s) = \frac{\mathbb{P}(X \geq t, X \geq s)}{\mathbb{P}(X \geq t)} = \frac{\mathbb{P}(X \geq \max(t,s))}{\mathbb{P}(X \geq s)}$$
$$= \begin{cases} \mathbb{P}(X \geq t)/\mathbb{P}(X \geq s) = \exp(-\lambda(t-s)) & t \geq s \\ 1 & t < s. \end{cases}$$

4. *Il valore cercato è evidentemente soluzione dell'equazione* $F(y) = \alpha$ *la quale, essendo* $\alpha \in (0,1)$ *non ha soluzione se* $y \in (-\infty, 0]$ *e quindi, nell' intervallo* $(0, +\infty)$*, coincide con l'equazione*

$$\alpha = 1 - \exp(-\lambda y)$$

cioè

$$y = \frac{1}{\lambda} \log\left(\frac{1}{1-\alpha}\right).$$

5. *Osserviamo che* Y *è ben definita e quasi certamente differente da* 0*. Calcoliamo la funzione di ripartizione*

$$F_Y(t) := \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(\log(X) \leq t) = \mathbb{P}(X \leq e^t) = F_X(e^t) = 1 - e^{\lambda e^t}.$$

6. *Definiamo* $a_n := \mathbb{E}(X^n)$ *(finito od eventualmente infinito); evidentemente* $a_0 = 1$*. Dalla formula di integrazione per parti, se* $n \geq 1$*, si ha*

$$a_n = \int_0^{+\infty} \lambda x^n e^{-\lambda x} \mathrm{d}x = -x^n e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-\lambda x} \mathrm{d}x$$
$$= \frac{n}{\lambda} a_{n-1}$$

da cui evidentemente, per induzione, $a_n = n!/\lambda^{-n}$*.*

Soluzione esercizio 5.

1. *Sia* X = *numero di risposte corrette. Con la convenzione che 0 indica una risposta sbagliata e 1 una risposta corretta, scegliamo come spazio campionario* $\Omega = \{(a_1, a_2, a_3) : a_i = 0, 1\}$ *e* $X((a_1, a_2, a_3)) = a_1 + a_2 + a_3$*. Quindi,*

$$p_X(0) := \mathbb{P}(X = 0) = \frac{3 \cdot 4 \cdot 4}{4 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{12}{25} = 0.48$$
$$p_X(1) := \mathbb{P}(X = 1) = \frac{3 \cdot 4 \cdot 1}{4 \cdot 5 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 1 \cdot 4}{4 \cdot 5 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 4}{4 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{40}{100} = 0.4$$
$$p_X(2) := \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1 \cdot 1 \cdot 4}{4 \cdot 5 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 1}{4 \cdot 5 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 1 \cdot 1}{4 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{11}{100} = 0.11$$
$$p_X(3) := \mathbb{P}(X = 3) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 2) = 0.01 \; (= \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{4 \cdot 5 \cdot 5})$$
$$p_X(x) = 0 \quad \textit{altrove}.$$

La funzione di ripartizione è data da

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.48 & 0 \le x < 1 \\ 0.48 + 0.40 = 0.88 & 1 \le x < 2 \\ 0.88 + 0.11 = 0.99 & 2 \le x < 3 \\ 1 & x \ge 3 \end{cases}$$

2. $\mathbb{P}(X \ge 1) = 1 - F_X(0) = 1 - 0.48 = 0.52$
3. $\mathbb{P}(X \le 1) = F_X(1) = 0.88$

Soluzione esercizio 6.

1. Nel primo caso scelgo $\Omega = \{\omega = (e_1, e_2), e_i = 1, \dots, 12\} = D^*_{12,2}$.
Si prova facilmente che $p_X(n) = \mathbb{P}(X = n) = \frac{2n-1}{144}, n = 1, \cdots, 12$ *e* $p_X(n) = 0$ *altrimenti. Infatti tutte e sole le coppie del tipo:* $\{(n,n), (a,n), (n,a) : a = 1, \cdots, n-1\}$*, fanno corrispondere ad* X *il valore* n*. Il numero di queste coppie è* $2(n-1) + 1 = 2n - 1$.
Verifichiamo che si tratta effettivamente di una densità di probabilità su $\{1, 2, \dots, 12\}$.
È sufficiente controllare che $\sum_{n=1}^{12} p_X(n) = 1$*, dal momento che* $p_X(n) \ge 0$ *se* $n = 1, \dots 12$ *ed è nulla altrimenti. Abbiamo che:*

$$\sum_{n=1}^{12} \frac{2n-1}{144} = 2\frac{12(12+1)/2}{144} - \frac{12}{144} = 1$$

2. Nel secondo caso scelgo $\Omega = \{\omega = [e_1, e_2], e_1 \neq e_2, e_i = 1, \dots, 12\} = C_{12,2}$
Se $n = 2, \cdots 12$*, allora* $\{X = n\} = \{[n, a], a = 1, \dots, n-1\}$.

$$p_X(n) = \begin{cases} \frac{(n-1)}{\binom{12}{2}} & n = 2, \cdots 12 \\ 0 & \textit{altrove} \end{cases}$$

Anche in questo caso per verificare che si tratta effettivamente di una densità di probabilità controlliamo che $\sum_{n=2}^{12} p_X(n) = 1$*. Quindi calcoliamo:*

$$\sum_{n=2}^{12} \frac{(n-1)}{\binom{12}{2}} = \frac{2}{11 \cdot 12} \sum_{k=1}^{11} k = \frac{2}{11 \cdot 12} \frac{11 \cdot 12}{2} = 1$$

Soluzione esercizio 7.

1. *La misurabilità delle variabili risulta dalla seguente scomposizione*

   $$Y_i(\omega) = X_{\sigma^{-1}(i)}(\omega) \quad \textit{se } X_{\sigma(1)}(\omega) \le \cdots \le X_{\sigma(n)}(\omega) \textit{ per } \sigma \in \Sigma_n$$

   (dove Σ_n *è lo spazio delle permutazioni di* $\{1, \dots, n\}$*) che è ben posta in quanto su* $\{X_{\sigma(1)} \le \cdots \le X_{\sigma(n)}\} \cap \{X_{\sigma'(1)} \le \cdots \le X_{\sigma'(n)}\}$ *si ha* $X_{\sigma(j)}(\omega) = X_{\sigma'(j)}(\omega)$ *per ogni* $j = 1, \dots, n$.

2. *La funzione di ripartizione si calcola come segue*

$$\begin{aligned} F_{Y_h}(x) &= \sum_{i\geq h} \sum_{1\leq j_1<\cdots<J_i\leq n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in\{j_1,\ldots,j_i\}} \{X_k \leq x\} \cap \bigcap_{k\notin\{j_1,\ldots,j_i\}} \{X_k > x\} \right) \\ &= \sum_{i\geq h} \sum_{1\leq j_1<\cdots<J_i\leq n} \prod_{k\notin\{j_1,\ldots,j_i\}} \mathbb{P}(\{X_k \leq x\}) \prod_{k\notin\{j_1,\ldots,j_i\}} \mathbb{P}(\{X_k > x\}) \\ &= \sum_{i\geq h} \binom{n}{j} F(x)^j (1-F(x))^{n-j} \end{aligned}$$

dove l'ipotesi di indipendenza è stata utilizzata solamente nella penultima uguaglianza mentre l'ipotesi di identica distribuzione è stata utilizzata solamente nell'ultima uguaglianza (ed F rappresenta la funzione di ripartizione, comune, delle variabili).

Si noti, in particolare che, Y_1 *ed* Y_n *sono, rispettivamente* $\min(\{X_1,\ldots,X_n\})$ *ed* $\max(\{X_1,\ldots,X_n\})$ *e vale*

$$F_{Y_1}(x) = F(x)^n \qquad F_{Y_n}(x) = 1-(1-F(x))^n.$$

Soluzione esercizio 8.

a) Sia $p = 3/8 = 0.375$ *la probabilità di entrare in un self-service (che chiamiamo "successo") e* $X =$ *numero di successi. Allora* $X \sim B(n,p) = B(5,3/8)$ *e si trova*

$$\mathbb{P}(X=2) = \binom{5}{2}\left(\frac{3}{8}\right)^2\left(\frac{5}{8}\right)^3 = 0.3433.$$

b) Questa volta l'automobilista sceglie $n = 5$ *stazioni da un insieme di* $N = 8$ *stazioni di cui* $K = 3$ *self-service, senza ripetizioni: è come se estraesse* $n = 5$ *palline da un'urna di* $N = 8$ *palline di cui* $K = 3$ *rosse e le rimanenti bianche, senza reimmissioni. Sia* $X =$ *numero di self-service. Allora* X *ha legge ipergeometrica di parametri* $(8,3,5)$ *e si trova*

$$\mathbb{P}(X=2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{5}{3}}{\binom{8}{5}} = \frac{\frac{3\cdot 2}{2!}\,\frac{5\cdot4\cdot3}{3!}}{\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4}{5!}} = \frac{3\cdot 10}{56} = 0.5357.$$

Soluzione esercizio 9.

1. *Possiamo immaginare che l'estrazione settimanale sia una prova di Bernoulli il cui successo sia l'apparizione del* 67 *nella cinquina estratta. Sia* $A =$

{nella cinquina estratta compare il 67 *}, il modello di riferimento è quello dell'estrazione senza ripetizione di* 5 *numeri da* 90 *quindi si ha*

$$p = \mathbb{P}(A) = \frac{\binom{89}{4}}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{18}$$

2. *Sia* T *la variabile che conta il numero di estrazioni necessarie per veder comparire il* 67*. Usando le notazioni introdotte:*

$$\mathbb{P}(T > 30) = (17/18)^{30} = 0.18$$

3. *Dobbiamo calcolare* $\mathbb{P}(T > 130|T > 100)$*. Ricordiamo che* T *gode della proprietà di assenza di memoria, quindi:* $\mathbb{P}(T > 130|T > 100) = \mathbb{P}(T > 30) = 0.18$.

4. *Sia* $X =$ *numero di successi nelle prime* 10 *prove, allora dobbiamo calcolare:*

$$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2|X = 2) = \frac{\mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3^c \cap \cdots \cap E_{10}^c)}{\mathbb{P}(X = 2)} = \frac{(1/18)^2(17/18)^8}{\binom{10}{2}(1/18)^2(17/18)^8} = \frac{1}{\binom{10}{2}}$$

5.

$$\mathbb{P}(E_1 \cup E_2|X = 2) = 1 - \mathbb{P}(E_1^c \cap E_2^c|X = 2) = 1 - \frac{\binom{8}{2}}{\binom{10}{2}} = 1 - \frac{28}{45} = \frac{17}{45}.$$

6. *Sia* $B = \{$*Il* 67 *esce almeno* 6 *volte in* 50 *estrazioni*$\}$*, poniamo* X *la v.a. che conta i successi nelle prime* 50 *prove, allora*

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B^c) = 1 - \sum_{k=0}^{5} \mathbb{P}(X = k) = 1 - \sum_{k=0}^{5} \binom{50}{k} \frac{1}{18}^k \frac{17}{18}^{50-k} = 0.6065$$

7. *Sia* $T_{10} =$ *la v.a. che conta il numero di prove necessarie per osservare il decimo successo, essa può assumere solo valori interi positivi. La sua densità è la seguente:*

$$p_{T_{10}}(n) = \begin{cases} \binom{n-1}{9}(1/18)^{10}(17/18)^{n-10} & \textit{se } n \geq 10 \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

Dobbiamo calcolare:

$$\mathbb{P}(T_{10} > 50) = 1 - \sum_{n=10}^{50} \binom{n-1}{9} (1/18)^{10}(17/18)^{n-10} = 0.00073$$

8. *Sia* $A =$ *"Nelle prime* 40 *prove il* 67 *è stato estratto* 9 *volte." Allora*

$$\{T_{10} > 50\} \cap A = E_{50}^c \cap \ldots E_{41}^c \cap A$$

quindi:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_{10} > 50|A) &= \frac{\mathbb{P}(\{T_{10} > 50\} \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(E_{50}^c \cap \ldots E_{41}^c)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} \\ &= \left(\frac{17}{18}\right)^{10} = 0.5646303 = \mathbb{P}(T_1 > 10)\end{aligned}$$

Soluzione esercizio 10.

Abbiamo:

$$\frac{p_Y(k)}{p_Y(k+1)} \geq 1 \Longleftrightarrow \frac{(k+1)(1-p)}{(n-k)p} \geq 1$$

(l'uguaglianza vale nella prima se e solo se vale nella seconda) da cui si ottiene che: $k \geq (n+1)p - 1$. *Quindi se* $(n+1)p$ *è intero la densità ha due punti di massimo per* $k = (n+1)p - 1, (n+1)p$. *Se* $(n+1)p$ *non è un numero intero abbiamo che il solo massimo è raggiunto in* $[(n+1)p]$.

Soluzione esercizio 11.

Si potrebbe mostrare che la somma di variabili di Poisson indipendenti è ancora una variabile di Poisson di parametro pari alla somma dei parametri delle singole variabili. Risolviamo invece l'esercizio senza tener conto di questa osservazione.

1. $$\begin{aligned}\mathbb{P}(\exists i \in \{1, \ldots, 10\} : X_i > 0) &= 1 - \mathbb{P}(X_i = 0, \forall i = 1, \ldots, 10) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{10} \mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - \exp(-10 \cdot 2) \approx 1.\end{aligned}$$

2. $$E\left[\sum_{i=1}^{10} X_i\right] = \sum_{i=1}^{10} E[X_i] = 10 \cdot 2 = 20.$$

3. $$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 \geq 3|X_i \leq 2, \forall i = 2, \ldots, 10) &= \mathbb{P}(X_1 \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(X_1 \leq 2) \\ &= 1 - (1 + 2 + 4/2!) \exp(-2) \approx 0.3233.\end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned}\mathbb{P}(\exists i \in \{1, \ldots, 10\} : X_i = 0) &= 1 - \mathbb{P}(X_i > 0, \forall i = 1, \ldots, 10) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{10} \mathbb{P}(X_i > 0) = 1 - (1 - \exp(-2))^{10} \approx 0.7664.\end{aligned}$$

Soluzione esercizio 12.

1. *X ha legge di Poisson di parametro* $\lambda = 2.3$.

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) = 1 - e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} = 0.6691.$$

2. *Adesso il parametro* λ *è incognito, deve risultare*

$$\mathbb{P}(X = 0) = e^{-\lambda} > \frac{1}{2},$$

quindi

$$-\lambda > \log\frac{1}{2}, \qquad \lambda < \log 2 = 0.6931.$$

Soluzione esercizio 13.

Sia
$A = \{$ *il messaggio è inviato da* $A\}$
$B = \{$*il messaggio è inviato da* $B\}$,
$R = \{$*il messaggio ricevuto è di lunghezza* n *e ci sono* $0.4n$ *bit* 1 $\}$

$$\mathbb{P}(A|R) = \frac{\mathbb{P}(R|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(R)} = \frac{\binom{10}{4}\frac{1}{2^{10}}}{\frac{1}{2}(\binom{10}{4}\frac{1}{2^{10}} + \binom{10}{4}\frac{1}{4^4}(\frac{3}{4})^6)} = \frac{1}{1 + \frac{3^6}{2^{10}}} = 0.5841 > \frac{1}{2}$$

Dal momento che $\mathbb{P}(B|R) = 1 - \mathbb{P}(A|R)$ *abbiamo che* $\mathbb{P}(B|R) < \frac{1}{2}$. *Per* $n = 100$ *abbiamo che il numero di bit ricevuti sono* $100 \cdot 0.4 = 40$,

$$\mathbb{P}(A|R) = \frac{1}{1 + \frac{3^{60}}{2^{100}}} = 0.9676.$$

La probabilità che si tratti della sorgente A *è aumentata.*

Soluzione esercizio 14.

1. *Se il più alto numero estratto è minore o uguale di* y *vuol dire che i* 6 *numeri estratti sono tutti minori o uguali di* y*, quindi*

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) = 0 && y < 6 \\ F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) = \frac{\binom{[y]}{6}}{\binom{10}{6}} && y \in (6, 10] \\ F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) = 1 && y > 10 \end{aligned} \tag{2}$$

dove $[\alpha]$ *è il più grande numero intero non superiore ad* α.

2. *Se il più basso numero estratto è maggiore di z lo sono tutti e 6 i numeri estratti, quindi:*

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(Z > z) = 1 && z < 1 \\ &\mathbb{P}(Z > z) = \frac{\binom{10-[z]}{6}}{\binom{10}{6}} && z \in [1, 5] \\ &\mathbb{P}(Z > z) = 0 && z > 5. \end{aligned} \tag{3}$$

Quindi:

$$F_Z(z) = 1 - \mathbb{P}(Z > z) \begin{cases} 0 & z < 1 \\ 1 - \frac{\binom{9}{6}}{\binom{10}{6}} & 1 \leq z < 2 \\ 1 - \frac{\binom{8}{6}}{\binom{10}{6}} & 2 \leq z < 3 \\ 1 - \frac{\binom{7}{6}}{\binom{10}{6}} & 3 \leq z < 4 \\ 1 - \frac{\binom{6}{6}}{\binom{10}{6}} & 4 \leq z < 5 \\ 1 & z \geq 5 \end{cases} \tag{4}$$

Soluzione esercizio 15.

1. *Posto V = "vincita", la probabilità richiesta si calcola utilizzando la distribuzione ipergeometrica:*

$$\mathbb{P}(V) = \frac{\binom{1}{1}\binom{5}{2}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{2}$$

Oppure, detto N_i l'evento "esce nero all'estrazione i-esima", si ha

$$\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(N_1) + \mathbb{P}({N_1}^c\, N_2) + \mathbb{P}({N_1}^c\, {N_2}^c\, N_3) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}\,\frac{1}{5} + \frac{5}{6}\,\frac{4}{5}\,\frac{1}{4} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\,.$$

2. *Si ha $\mathbb{P}({N_1}^c\, {N_2}^c) = \frac{5}{6}\,\frac{4}{5} = \frac{2}{3}$; poi la probabilità richiesta è*

$$\mathbb{P}(V | N_1^c\, N_2^c) = \mathbb{P}(N_3 | N_1^c\, N_2^c) = \frac{\mathbb{P}(N_1^c\, N_2^c\, N_3)}{\mathbb{P}(N_1^c\, N_2^c)} = \frac{1/6}{2/3} = \frac{1}{4}\,.$$

3. *Si chiede $\mathbb{P}({N_1}^c\, {N_2}^c | V)$. Si ha*

$$\mathbb{P}(N_1^c\, N_2^c | V) = \frac{\mathbb{P}(V | N_1^c\, N_2^c)\, \mathbb{P}(N_1^c\, N_2^c)}{\mathbb{P}(V)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\,,$$

oppure, ricordando che $N_1^c \cap N_2^c \cap V = N_3 \cap V$,

$$\mathbb{P}(N_1^c\, N_2^c | V) = \frac{\mathbb{P}(N_1^c\, N_2^c\, N_3)}{\mathbb{P}(V)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}\,.$$

Soluzione esercizio 16.

1. *Ricordiamo che il numero di possibili scelte, in una popolazione di N individui distinti divisi in k sottopopolazioni di cardinalità $n_1, \ldots, n_k$, di un insieme di M individui di cui m_i provengano dalla sottopopolazione i-esima è*
$$\prod_{i=1}^{k} \binom{n_i}{m_i}$$
pertanto la probabilità fare una simile scelta è
$$\frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{k} \binom{n_i}{m_i}}{\displaystyle\binom{n}{m}}.$$
In questo caso $N = 6$, $M = 3$, $k = 3$, $n_i = i$ e $m_i = 1$ per ogni $i = 1, 2, 3$; quindi la probabilità di vittoria è $6/\binom{6}{3}$ cioè $3/10$.

2. *Il numero di estrazioni (considerando l'ordine) in cui compaiono una bianca ed una rossa nelle prime due sono $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4$ (su $6!/(6-3)!$ totali). Di queste solo $2 \cdot 3 \cdot 2$ hanno la pallina nera all'ultima estrazione, quindi la probabilità di vincere dato che nelle prime due estrazioni sono uscite una pallina rossa ed una bianca è $1/4$.*

3. *Siano gli eventi*
A="la pallina nera non è uscita nelle prime due estrazioni"
B="nelle prime due estrazioni sono uscite una pallina bianca ed una rossa"
V="sono usciti tre colori differenti".
Allora $\mathbb{P}(V|A) = \mathbb{P}(V \cap B|A) + \mathbb{P}(V \cap B^c|A)$. Poichè $V \cap A \subset B$, si ha che $\mathbb{P}(V \cap B^c \cap A) = 0$; il numero di estrazioni (contate nell'ordine) in cui il nero non compare ai primi due posti è $5 \cdot 4 \cdot 4$ di cui solo $2 \cdot 3 \cdot 2$ sono vincenti, pertanto $\mathbb{P}(V|A) = 3/20$.

4. *Considerando l'ordine delle estrazioni degli N individui distinti allora il numero di disposizioni è $M! \prod_{i=1}^{k} \binom{n_i}{m_i}$, nel nostro caso quindi il numero di disposizioni vincenti $3! \cdot 6$ di cui solo $1/3$ hanno a proprietà di avere il colore nero all'ultimo posto. Quindi la probabilità che sia uscito il nero alla terza estrazione sapendo che abbiamo vinto è $1/3$.*

Soluzione esercizio 17.

1. *Sia* $T_1 := \min\{i : X_i = 1\}$ *e per induzione* $T_{n+1} := \min\{i > T_n : X_i = 1\}$. *Pertanto*

$$\mathbb{P}(T_n = t) = \sum_{1 \le t_1 < \cdots < t_{n-1} < t = t_n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in \{t_1, \ldots, t_n\}} \{X_i = 1\} \cap \bigcap_{i \notin \{t_1, \ldots, t_n\}} \{X_i = 0\} \right)$$
$$= \begin{cases} \binom{t-1}{n-1} p^n (1-p)^{t-n} & t \ge n \\ 0 & t < n. \end{cases}$$

2. *Si tratta di calcolare* $\mathbb{P}(X_{n+m} = t + k | X_n = t)$*; l'evento* $\{X_{n+m} = t + k, X_n = t\}$ *ammette la partizione seguente*

$$\bigcup_{\substack{(t_1, \ldots, t_{m+n}) \\ 1 \le t_i < t_{i+1} \le t+k \\ t_n = t, t_{n+m} = t+k}} \left(\bigcap_{i \in \{t_1, \ldots, t_{n+m}\}} \{X_i = 1\} \cap \bigcap_{i \notin \{t_1, \ldots, t_{n-1}, t\}} \{X_i = 0\} \right)$$

da cui

$$\mathbb{P}(X_{n+m} = t + k, X_n = t)$$
$$= \sum_{\substack{(t_1, \ldots, t_{m+n}) \\ 1 \le t_i < t_{i+1} \le t+k \\ t_n = t, t_{n+m} = t+k}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in \{t_1, \ldots, t_{n+m}\}\{X_i = 1\}} \cap \bigcap_{i \notin \{t_1, \ldots, t_{n-1}, t\}\{X_i = 0\}} \right)$$
$$= \begin{cases} \binom{n-1}{t-1}\binom{m-1}{k-1} p^{m+n} (1-p)^{t+k-m-n} & \substack{n \ge t \\ m \ge k} \\ \\ 0 & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

Utilizzando il punto precedente

$$\mathbb{P}(X_{n+m} = t + k | X_n = t) = \begin{cases} \frac{\binom{n-1}{t-1}\binom{m-1}{k-1} p^{m+n} (1-p)^{t+k-m-n}}{\binom{t-1}{n-1} p^n (1-p)^{t-n}} & \substack{n \ge t \\ m \ge k} \\ \\ 0 & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \binom{m-1}{k-1} p^m (1-p)^{k-m} & \substack{n \ge t \\ m \ge k} \\ \\ 0 & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \mathbb{P}(X_m = k) & \substack{n \ge t \\ m \ge k} \\ \\ 0 & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

3. *Analogamente a quanto visto prima,*

$$\mathbb{P}(T_n > t) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{t}{i} p^i (1-p)^{t-i} & t \ge n \\ 0 & t < n, \end{cases}$$

pertanto

$$\mathbb{P}(T_n \geq t+k | T_n \geq t) = \frac{\mathbb{P}(T_n \geq t+k)}{\mathbb{P}(T_n \geq t)} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \binom{t+k}{i} p^i (1-p)^{t+k-i}}{\sum_{i=0}^{n-1} \binom{t}{i} p^i (1-p)^{t-i}}$$

che, nel caso specifico $n = 1$ implica $\mathbb{P}(T_1 > t+k | T_1 > t) = \mathbb{P}(T_1 > k)$ (assenza di memoria).

Soluzione esercizio 18.
La probabilità che ogni singola chiamata sia interurbana è $p = 3/10 = 0.3$. Supponendo che le chiamate siano indipendenti siamo in presenza di un processo di Bernoulli. Sia X il numero di chiamate interurbane.

1. *L'evento considerato si verifica quando le prime 2 chiamate sono urbane, il che capita con probabilità $0.7^2 = 0.49$.*

2. *Sia ora T ha legge del primo successo, T ha legge geometrica di parametro $p = 0.3$, dobbiamo calcolare:*

$$\mathbb{P}(T > 5 | T > 3) = \mathbb{P}(T > 2) = 0.7^2$$

   la prima uguaglianza è conseguenza della proprietà di assenza di memoria della legge geometrica.

3. *Denotiamo con X_i la v.a. che rappresenta il successo della i-esima prova e con X la variabile che conta il numero di successi nelle prime 10 prove:*

$$\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1 | X = 2) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0, \ldots, X_{10} = 0)/\mathbb{P}(X = 2) = \frac{0.3^2 0.7^8}{\binom{10}{2} 0.3^2 0.7^8} = \frac{1}{\binom{10}{2}}$$

   la seconda identità è garantita dal fatto che

$$\{X_1 = 1, X_2 = 1\} \cap \{X = 2\} = \{X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0, \ldots, X_{10} = 0\}$$

4. *Sia $A = \{$ la chiamata è arrivata a $a\}$,*
   $B = \{$la chiamata è arrivata a $b\}$,
   $I = \{$ la chiamata arrivata è interurbana$\}$

$$\mathbb{P}(A|I) = \frac{\mathbb{P}(I|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(I)} = \frac{\frac{3}{10}\frac{1}{2}}{\frac{3}{10}\frac{1}{2} + \frac{2}{7}\frac{1}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{20}{21}} = 0.5122 > \frac{1}{2}$$

   quindi è più probabile che la chiamata provenga dal centralino A, visto che $\mathbb{P}(B|I) = 1 - \mathbb{P}(A|I)$.

Soluzione esercizio 19.

1. *Per ciascun* $k = 1, \dots, 5$ Y_k *è una variabile Bernoulliana, infatti assume solo valori* 0 *ed* 1. *Dobbiamo individuare la probabilità di successo* $\mathbb{P}(Y_k = 1) = \mathbb{P}(E_k)$.
$$\mathbb{P}(E_k) = \frac{\#\ \textit{casi favorevoli}}{\#\ \textit{casi possibili}}$$
I casi possibili sono $D_{10,5} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$, *per calcolare i casi favorevoli usiamo il prodotto delle possibilità: ho* 6 *possibilità per individuare la pallina rossa estratta alla* k*-esima estrazione poi restano* 4 *posizioni che possono essere "riempite" da* 9 *palline in totale ho* $6 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ *possibilità. Questo ragionamento non è influenzato da* k, *quindi* $\mathbb{P}(E_k) = \frac{6 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{6}{10} \quad \forall\, k = 1, \dots 5$.

   In generale si verifica che in un estrazione $(a_1, \dots, a_m)$ *da una popolazione di* n *individui distinti ed equiprobabili suddivisi in sottopopolazioni di cardinalità* n_i *(si supponga che* a_i *determini proprio la sottopopolazione di appartenenza) allora presa una permutazione* σ *di* $(1, 2, \dots, m)$ *si ha* $\mathbb{P}(a_1, \dots, a_m) = \mathbb{P}(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(m)})$.

   La distribuzione congiunta è
$$\mathbb{P}(Y_i = a_i, i = 1, \dots m) = \begin{cases} \frac{\prod_{j=1}^{m} \binom{n_j}{\#\{i : a_i = j\}}}{\binom{n}{m}} & \#\{i : a_i = j\} \leq n_j,\ \forall j \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

2. *Queste prove non sono indipendenti, infatti già per* $h \neq k = 1, \dots, 5$
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_k = 1 \cap Y_h = 1) = \mathbb{P}(E_k \cap E_h) &= \frac{\# casifavorevoli}{\# casipossibili} \\ &= \frac{6 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{6 \cdot 5}{10 \cdot 9} \\ &\neq \left(\frac{6}{10}\right)^2 = \mathbb{P}(E_k)\mathbb{P}(E_h) = \mathbb{P}(Y_k = 1)\mathbb{P}(Y_h = 1) \end{aligned}$$
il numero dei casi favorevoli si stabilisce allo stesso modo del punto precedente.

   Un altro modo per vedere che non c'è indipendenza tra le prove è notare che $\mathbb{P}(X_i = 0, \forall i = 1, \dots, 5) = 0 \neq \prod_{i=1}^{5} \mathbb{P}(X_i = 0)$.

3. *Definiamo* T *la v.a. che conta il* $\#$ *di estrazioni necessarie per estrarre una pallina rossa, allora dobbiamo calcolare:*
$$\mathbb{P}(T > 3 | T > 2) = \frac{\mathbb{P}(T > 3)}{\mathbb{P}(T > 2)} = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} \frac{\binom{10}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{2}{8} \neq \mathbb{P}(T > 1) = \frac{4}{10}$$
La v.a. T *non ha la proprietà di assenza di memoria.*