6 Esercitazione 6: / /

6.1 Densità discrete e continue, funzioni di variabile aleatoria

Esercizio 1 *Un' urna A contiene n palline tutte rosse. Un'urna B contiene n palline di cui r rosse ($1 \leq r < n$) e le rimanenti $n - r$ nere. Si sceglie a caso una delle urne (la A con probabilità p e la B con probabilità $1 - p$) e da essa si effettua una successione di estrazioni con rimpiazzo.*

1. *Qual è la probabilità che la prima pallina estratta sia rossa?*
2. *Qual è la probabilità che le prime due palline estratte abbiano colore diverso?*
3. *Con quale probabilità la prima pallina rossa viene estratta alla terza estrazione?*
4. *Determinare la legge del primo istante in cui viene estratta la pallina rossa.*

Esercizio 2 *In un mazzo di n chiavi si cerca quella giusta provandole a caso una dopo l'altra (e mettendo da parte le chiavi già provate).*

1. *Qual è la probabilità che si debbano fare esattamente k tentativi ($1 \leq k \leq n$) per trovare la chiave giusta?*
2. *Avendo già effettuato $k < n - l$ tentativi (con $l \geq 0$), qual è la probabilità di non trovare la chiave giusta neppure entro il $k + l$-esimo?*
3. *Come variano le risposte ai punti precedenti se, stupidamente, prima di procedere a un nuovo controllo la chiave appena controllata è rimessa nel mazzo?*

Esercizio 3 *In una linea produttiva la frequenza relativa con cui sono prodotti i pezzi difettosi è 0.005. Con quale probabilità su 1200 pezzi ve ne sono esattamente 4 difettosi ?*

Esercizio 4 *Data una variabile aleatoria X di Poisson di parametro $\lambda = 3$, si calcoli la densità di $Y = \min(3, X)$.*

Esercizio 5 *Sia X una variabile aleatoria con funzione di ripartizione:*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & se\ x < 0 \\ \frac{1}{50}x^2, & se\ 0 \leq x < 5 \\ -\frac{1}{50}x^2 + \frac{2}{5}x - 1, & se\ 5 \leq x < 10 \\ 1, & se\ x \geq 10 \end{cases}$$

1. *Disegnare F. Quali valori può assumere la variabile aleatoria (continua) X?*
2. *Mostrare che X ha densità e calcolarla.*
3. *Calcolare il valore atteso di X.*

Esercizio 6 *Due cavalli partecipano ad una corsa, il primo ha un tempo medio di percorrenza della pista $\mathbb{E}(T_A) = \alpha$ inferiore a quello del secondo $E(T_B) = \beta$. Supponendo che corrano l'uno contro l'altro ma in maniera indipendente (supponiamo che non si possano vedere l'un l'altro): fate bene a scommettere su A? E se corressero in maniera dipendente?*

Esercizio 7 *Due componenti elettronici A e B hanno tempi medi di vita, rispettivamente α e β con $\alpha < \beta$. Per una prova abbiamo bisogno di garantire che il componente funzioni almeno per un tempo γ (con $\gamma < \alpha$). Facciamo bene a scegliere il componente B?*

Esercizio 8 *Una valvola viene installata in una condotta idraulica al tempo $t = 0$ e controllata agli istanti $n\tau$ $(n = 1, 2, \dots)$. Si sa che la durata di funzionamento X della valvola segue una legge esponenziale di parametro λ.*

1. *Calcolare la probabilità p che la valvola non funzioni al momento del primo controllo.*
2. *Scrivere e riconoscere la legge che segue il numero N di controlli effettuati, compreso l'ultimo, fino ad avere il primo guasto.*
3. *Sia $Y = \min\{X, \tau\}$ la parte del periodo di tempo $(0, \tau]$ in cui la valvola funziona. Calcolare la funzione di ripartizione F_Y di Y e disegnarne il grafico. Quanto vale $\mathbb{P}(Y = \tau)$, cioè la probabilità che la valvola funzioni al momento del primo controllo?*

Esercizio 9 *

1. *Sia X una variabile aleatoria a valori in $\mathbb{N}$ tale che $\mathbb{P}(X > 1) > 0$ con la proprietà di assenza di memoria i.e.*

   $$\forall n, N \in \mathbb{N},\ N \geq n : \mathbb{P}(X > n) > 0 \Longrightarrow \mathbb{P}(X > N | X > n) = \mathbb{P}(X > N - n).$$

   Mostrare che X ha distribuzione geometrica.

2. *Sia X una variabile aleatoria assolutamente continua con la proprietà di assenza di memoria i.e.*

$$\forall s, t \in \mathbb{N},\, t \geq s : \mathbb{P}(X > s) > 0 \Longrightarrow \mathbb{P}(X > t | X > s) = \mathbb{P}(X > t - s).$$

Mostrare che X ha distribuzione esponenziale.

Esercizio 10 *(Leggi di Weibull) Per $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ consideriamo la funzione*

$$f(t) = \begin{cases} \lambda \alpha t^{\alpha - 1} e^{-\lambda t^{\alpha}} & se\ t > 0 \\ 0 & se\ t \leq 0 \end{cases}$$

1. *Mostrare che f è una densità e calcolarne la funzione di ripartizione.*

2. *Sia T una v.a. di densità f. Calcolare*

$$\mathbb{P}(T > t + s | T > s)$$

per $t, s > 0$.
Per quali valori di α, λ questa funzione è crescente in s ?
Per quali valori è decrescente ?
Dovendo modellizzare con tempo T il tempo di rottura di un apparecchiatura soggetta ad usura, quali valori di α e λ scegliereste ?

Esercizio 11 *Sia X positiva ed assolutamente continua con densità continua f e funzione di ripartizione F, tale che $F(s) < 1$ per ogni $s < \infty$. Sia $H(s) = -\log(1 - F(s))$.*

1. *Provare che H è differenziabile con derivata $h = \dfrac{f}{1-F}$, la funzione h è detta* Hazard function *di F.*

2. *Provare che per ogni t,*

$$h(t) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{P}(X \leq t + h | X > t)$$

3. *Provare che $\int_0^{+\infty} h(t)\, dt = +\infty$*

4. *Provare che:*

$$\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \exp(-\int_t^{t+s} h(u)\, du)$$

per ogni $t, s \geq 0$.

5. *Provare che $X \sim esp(\lambda)$ se e solo se $h \equiv \lambda 1_{[0,+\infty)}$.*

Esercizio 12 *Viene lanciata una moneta* 10 *volte, sia* X *la differenza in valore assoluto fra il numero di teste e il numero di croci. Determinare la densità di* X.

Esercizio 13 *Un addetto al monitoraggio osserva il passaggio dei treni su una linea ferroviaria, rilevando quali sono in orario e quali in ritardo. Si supponga che la probabilità che un treno sia in ritardo sia* $p = 0.25$.

1. *Si calcoli la probabilità che, su* 10 *treni, piú di* 2 *siano in ritardo.*
2. *Si calcoli la probabilità che il primo treno in ritardo che viene osservato sia il quinto oppure uno dei seguenti.*
3. *Supponendo di monitorare una linea in cui i treni sono molto puntuali (in questo caso p= 0.01) si calcoli in modo approssimato la probabilità che, su* 200 *treni, al piú uno solo sia in ritardo.*

Esercizio 14 *Si verifichi se le seguenti funzioni* f *sono densità di probabilità. In caso positivo si determini la funzione di ripartizione* F.

$$1)\ f(x) = \begin{cases} 3x^2 & x \in (0,1) \\ 0 & \textit{altrove} \end{cases} \qquad 2)\ f(x) = \begin{cases} \frac{\theta}{2} & x \in [0,1) \\ \frac{1}{2} & x \in [1,2) \\ \frac{1-\theta}{2} & x \in [2,3) \\ 0 & \textit{altrove} \end{cases}$$

$$3)\ f(x) = \begin{cases} -1 & x \in (0,1) \\ 0 & \textit{altrove} \end{cases} \qquad 4)\ f(x) = \begin{cases} x & x \in (0,1) \\ 3-x & x \in (2,3) \\ 0 & \textit{altrove} \end{cases}$$

$$5)\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in (a,b) \\ 0 & \textit{altrove} \end{cases} \qquad 6)\ f(x) = \begin{cases} 1/x & x > 0 \\ 0 & \textit{altrove} \end{cases}$$

$$7)\ f(x) = \begin{cases} 4x^3 & x \in (0,2) \\ 0 & \textit{altrove} \end{cases} \qquad 8)\ f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & x \geq 1 \\ 0 & \textit{altrove} \end{cases}$$

Esercizio 15 *Si consideri la funzione:*

$$f(x) = \begin{cases} kxe^{-x^2} & x \geq 0 \\ 0 & \textit{altrove} \end{cases}$$

1. *Determinare la costante* k *per cui* f *è una densità di probabilità.*
2. *Calcolare* $\mathbb{P}(X \leq 1)$ *e* $\mathbb{P}(X < 1)$.

Esercizio 16 ** *Sia* I *un insieme al più numerabile e si estragga un valore casuale di legge* $\{p_i\}_{i\in I}$. *Si decide di pagare* $c \cdot q_i$ *a chiunque abbia scommesso c sull'uscita del valore* i. *Supponendo che il volume delle scommesse sia indipendente dall'estrazione, si caolcolino i valori* $\{q_i\}_{i\in I}$ *affinché il valore atteso del guadagno per gli organizzatori sia comunque positivo.*

Esercizio 17 ** *Sia I un insieme al più numerabile e N una variabile aleatoria a valori in I. Sia $\{C_i\}_{i\in I}$ una collezione di variabili aleatorie reali indipendente da N. Sia $C_N(\omega) := C_{N(\omega)}(\omega)$ per ogni $\omega \in \omega$.*

1. *Si mostri che C_N è una variabile aleatoria.*
2. *Calcolare $\mathbb{P}(C_N \in A)$ in dipendenza da $\{C_i\}_{i\in I}$ e N.*
3. *Supponendo le variabili $\{C_i\}_{i\in I}$ e N integrabili e supponendo altresì $\sum_{i\in I} \mathbb{E}[|C_i|] < +\infty$ si mostri che anche C_N è integrabile e si calcoli $\mathbb{E}[C_N]$.*

4^{**}. *Si calcoli $\mathbb{P}(C_N = j_0)$ nel caso in cui $I = \mathbb{N}^*$ e*

$$\mathbb{P}(N = i) = p(1-p)^{i-1}, \qquad \forall i \in \mathbb{N}^* \quad (p \in (0,1))$$
$$\mathbb{P}(C_i = j) = \begin{cases} \frac{1}{i} & \forall j \in \mathbb{N}^*, j \leq i \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases} \quad \forall i \in \mathbb{N}^*.$$

Esercizio 18 ** *Si consideri una sequenza infinita di lanci di una moneta non truccata. È ben noto che la probabili'tà che esca la coppia (ordinata) (T,T) nei primi due lanci è equivalente a quella che esca la coppia (T,C) e che la probabilità che esca prima (T,T) di (T,C) è 1/2. Mostrare che il valore atteso del numero di lanci occorrenti affinchè si presenti la coppia (T,T) (risp. (T,C)) è 6 (risp. 4).*

Esercizio 19 *(Punto fisso stocastico) Sia X un insieme al più numerabile e sia $\{Z_x\}_{x\in X}$ una collezione di variabili i.i.d. a valori in X di legge determinata dalla sequenza $\{p_x\}_{x\in X}$. Mostrare che*

$$\mathbb{P}(\exists x \in X : Z_x = x) \in \left(1 - \frac{1}{e}, 1\right].$$

Mostrare inoltre che $\mathbb{P}(\exists x \in X : Z_x = x) = 1$ se e solo se esiste $x \in X$ tale che $p_x = 1$.

SOLUZIONI

Soluzione esercizio 1.
Sia

$A :=$ " viene scelta l' urna A"
$B :=$ " viene scelta l' urna B"
$R_i :=$"la i-esima pallina estratta è rossa"
e sia T la v.a. che conta il numero di estrazioni necessarie per estrarre la prima pallina rossa, cioè $T(\omega) := \min\{i : \omega \in A_i\}$.

1. Si ha che

$$\mathbb{P}(R_1) = \mathbb{P}(R_1|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(R_1|B)\mathbb{P}(B) = p + (1-p)\frac{n-r}{n}.$$

2. Allo stesso modo, se
H:="le prime due palline estratte hanno colore differente",

$$\mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(H|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(H|B)\mathbb{P}(B) = 2\frac{r(n-r)}{n^2}(1-p).$$

3. È un caso particolare del punto seguente.

4. Abbiamo:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T=i) &= \mathbb{P}(T=i|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(T=i|B)\mathbb{P}(B)\\ &= \begin{cases} p + \frac{r}{n}(1-p) & i=1\\ \frac{(n-r)^{i-1}r}{n^i}(1-p) & i \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}\\ 0 & \text{altrimenti.}\end{cases}\end{aligned}$$

Soluzione esercizio 2.

1. Sia Y la variabile aleatoria che indica il numero di tentativi fatti prima di trovare la chiave giusta. Per risolvere l'esercizio, dobbiamo calcolare $\mathbb{P}(Y=k)$.

   Valgono le seguenti eguaglianze:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(Y>k) = \frac{\binom{n-1}{k}\binom{1}{0}}{\binom{n}{k}} = \frac{n-k}{n}, \qquad k=1,\dots n-1\\ &\mathbb{P}(Y>n) = 0\end{aligned}$$

   da cui

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(Y\le k) = \frac{k}{n}, \text{ per } k:1,\dots n \quad \text{ e } \mathbb{P}(Y\le 0)=0,\\ &\mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{P}(Y>k-1) - \mathbb{P}(Y>k) = \mathbb{P}(Y\le k) - \mathbb{P}(Y\le k-1) = \frac{1}{n},\end{aligned}$$

   per $k=1,\dots n$.

   NB: La variabile aleatoria Y ha *densità uniforme discreta sui primi n numeri naturali.*

2. $\mathbb{P}(Y>k+l \mid Y>k) = \mathbb{P}(\{Y>k+l\}\cap\{Y>k\})/\mathbb{P}(Y>k) = \mathbb{P}(Y>k+l)/\mathbb{P}(Y>k) = \frac{n-k-l}{n-k} < \frac{n-l}{n} = \mathbb{P}(Y>l)$.

3. Nell'ipotesi di estrazioni di una chiave dal mazzo con reimmissione si ha uno schema di Bernoulli, allora $Y^* = \#$ tentativi per trovare la chiave giusta ha distribuzione geometrica di parametro $1/n$. Quindi, $\mathbb{P}(Y^* = k) = \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}$ $\forall k = 1, 2, \ldots$ e $\mathbb{P}(Y^* > k + l \mid Y^* > k) = \mathbb{P}(Y^* > l) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{l}$.

Osservazione. La situazione classica dell'assenza di memoria è la seguente: sia $\{A_t\}_{t\in\Gamma}$ una famiglia decrescente di eventi, dove $\Gamma \in \{\mathbb{N}, \mathbb{R}\}$, allora la proprietà di assenza di memoria

$$\forall t, s \in \Gamma : t \geq s \Longrightarrow \mathbb{P}(X \in A_t | X \in A_s) = \mathbb{P}(X \in A_{t-s})$$

è equivalente a

$$\forall t, s \in \Gamma : s \geq 0 \Longrightarrow \mathbb{P}(X \in A_{t+s}) = \mathbb{P}(X \in A_t)\mathbb{P}(X \in A_s).$$

Soluzione esercizio 3.
La variabile X che conta i pezzi difettosi ha legge binomiale di parametri $n = 1200$ e $p = 0.005$, è lecito quindi utilizzare la approssimazione di Poisson:

$$\mathbb{P}(X = 4) = e^{-6}\frac{6^4}{4!} = 0.1338526$$

[Crf. con il valore "vero"$\mathbb{P}(X = 4) = \binom{1200}{4}(0.005)^4(0.995)^{1200-4} = 0.1338520$].

Soluzione esercizio 4.
Y assume solo valori interi minori o uguali a 3. Abbiamo che:

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = k) = e^{-3}\frac{3^k}{k!},\ k = 0, 1, 2$$

$$\mathbb{P}(Y = 3) = \mathbb{P}(X \geq 3) = e^{-3}\sum_{k=3}^{+\infty}\frac{3^k}{k!} \equiv \exp^{-3}\sum_{k=0}^{2}\frac{3^k}{k!}$$

$$\mathbb{P}(Y = k) = 0 \quad k = 4, 5, 6, \ldots$$

La sua densità è la seguente:

$$p_Y(x) = \begin{cases} e^{-3}\frac{3^x}{x!} & \text{se } x = 0, 1, 2 \\ e^{-3}\sum_{k=3}^{+\infty}\frac{3^k}{k!} & \text{se } x = 3 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Soluzione esercizio 5.
Diamo inizialmente un breve cenno sul metodo di ricerca della legge o distribuzione di una variabile X. Si tratta di determinare la misura di probabilità $\mathbb{P}_X(\cdot) := \mathbb{P}(X^{-1}(\cdot))$ definita sulla σ-algebra dello spazio di arrivo della variabile

X; questo è equivalente, nel caso reale, a determinare $F_X(t) := \mathbb{P}(X \leq t) \equiv \mathbb{P}(X^{-1}((-\infty, t]))$. Si determina $X_0 := \{\alpha : \mathbb{P}(X = \alpha) > 0\}$ il quale, si dimostra facilmente, è al più numerabile. Sia $G_X(t) = \sum_{\alpha \in X_0 : \alpha \leq t} \mathbb{P}(X = \alpha)$; allora

$$H_X(t) := F_X(t) - G_X(t)$$

è non decrescente e continua. $H_X = 0$ se e solo se $\sum_{\alpha \in X_0} \mathbb{P}(X = \alpha) = 1$; in caso contrario si cerca di vedere se H_X è la primitiva di qualche funzione. Si può mostrare che H_X è derivabile quasi ovunque (chiamiamola H'_X) e, se ammette densità, essa deve coincidere con la sua derivata dove questa esiste. Pertanto alla fine si ottiene una scrittura

$$F_X(t) = G_X(t) + \int_{-\infty}^{t} H'_X(s)\mathrm{d}s + R_X(t)$$

dove R_X è una funzione residua non decrescente, continua, derivabile quasi ovunque con derivata nulla. Si dice che X è puramente discreta se $R_X \equiv 0$ e $H_X \equiv 0$; si dice che è (assolutamente) continua se $R_X \equiv 0$ e $G_X \equiv 0$ (i.e. $X_0 = \emptyset$).

1. I valori assunti dalla v.a. X (il cui insieme prende il nome di *range essenziale* della variabile X) sono

   $$\text{essRg}(X) = \{y : \forall V \text{ intorno di } y, \mathbb{P}(V) > 0\} \equiv \cup_{x \in \mathbb{R}} \widehat{F_X^{-1}(x)}^{o}$$

   (dove $\widehat{A}^o$ è l'interno topologico di A). In definitiva si trova l'intervallo $[0, 10]$.

2. F è derivabile con continuità e la funzione di densità $f = F'$ di X risulta essere:

   $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{25}x, & 0 < x < 5 \\ -\frac{1}{25}x + \frac{2}{5}, & 5 \leq x < 10 \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases}$$

3. $E[X] = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\, dx = \int_0^5 \frac{1}{25}x^2 dx + \int_5^{10} \left(-\frac{1}{25}x^2 + \frac{2}{5}x\right) dx = 5$

Soluzione esercizio 6.

La soluzione in entrambi i casi è: non è detto.

Sia $p \in (0, 1)$ Supponiamo che esista un evento E tale che $\mathbb{P}(E) = p$. Se le variabili T_A e T_B fossero, ad esempio

$$T_A := \alpha$$
$$T_B := \beta$$

allora $\mathbb{P}(T_A < T_B) = 1 > 1/2$, ma se, ad esempio, le due leggi fossero

$$T_A := \alpha$$
$$T_B := \alpha/2 \cdot \mathbb{1}_E + (\beta - p\alpha/2)/(1-p)\mathbb{1}_{E^c}$$

allora evidentemente le ipotesi sono verificate, ma $\mathbb{P}(T_A < T_B) = 1 - p$, per cui può essere presa piccola a piacere.

Un controesempio nel caso dipendente è dato dalla coppia di variabili aleatorie

$$(T_A, T_B) = \left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{4}\right) \mathbb{1}_E + \left(\frac{\alpha - p\alpha/2}{1-p}, \frac{\beta - p\alpha/4}{1-p}\right) \mathbb{1}_{E^c}$$

dove $p \in (0, 1)$.

Soluzione esercizio 7.

Come nell'esercizio precedente la risposta è: non è detto. Ci possono essere anche in questo caso delle patologie: si prenda ad esempio il caso

$$\begin{aligned} &T_A := \alpha \\ &T_B := \gamma/2 \cdot \mathbb{1}_E + (\beta - p\gamma/2)/(1-p)\mathbb{1}_{E^c} \end{aligned}$$

(dove E è come nell'esercizio precedente) allora in questo caso $\mathbb{P}(T_A > \gamma) = 1$ mentre $\mathbb{P}(T_B > \gamma) = 1 - p$.

Soluzione esercizio 8.

1. Si ha $\mathbb{P}(X \le \tau) = 1 - e^{-\lambda\tau}$.

2. Sia N = numero dei controlli effettuati prima del primo guasto (compreso l'ultimo), si ha, per ogni $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(N > k) = \mathbb{P}(X > (k-1)\tau) = e^{-\lambda(k-1)\tau} = \left(e^{-\lambda\tau}\right)^{k-1}$$

quindi N ha legge geometrica di parametro $1 - e^{-\lambda\tau}$. Equivalentemente è possibile riconoscerla da

$$\mathbb{P}(N > k) = \mathbb{P}((k-1)\tau < X \le k\tau) = 1 - e^{-\lambda k\tau} - 1 + e^{-\lambda(k-1)\tau} = (e^{-\lambda\tau})^k(1 - e^{-\lambda\tau}).$$

3. Si ha

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & 0 < t < \tau \\ 1 & t \ge \tau \end{cases} \tag{1}$$

Quindi $\mathbb{P}(Y = \tau) = e^{-\lambda\tau}$. Si tratta di una variabile aleatoria mista, ovvero né discreta né continua. La sua funzione di ripartizione è combinazione convessa della funzione di ripartizione di una variabile assolutamente continua e di una discreta. Si ha, infatti:

$$F_Y(t) = (1 - e^{-\lambda\tau}) \left(\frac{(1 - e^{-\lambda t}) I_{(0,\tau)}(t)}{1 - e^{-\lambda\tau}} + I_{[\tau,\infty)} \right) + e^{-\lambda\tau} I_{[\tau,\infty)}.$$

Soluzione esercizio 9.

1. Sia $a := \mathbb{P}(X > 1)$ allora per induzione

$$\mathbb{P}(X > n) = \mathbb{P}(X > 1)^n = a^n.$$

   Si noti che, essendo $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X > n) = 0$, si ha che $a < 1$.

2. Dalla richiesta di assenza di memoria si ha che $\mathbb{P}(X > 0) = 1$; dalla continuità da destra di $t \mapsto \mathbb{P}(X > t)$ si ha che esiste $\epsilon > 0$ tale che $\mathbb{P}(X > \epsilon) =: a > 0$. Per induzione su $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\mathbb{P}(X > n\epsilon) = \mathbb{P}(X > \epsilon)^n = a^n$$

   e similmente, se $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X > n\epsilon/m)^m = \mathbb{P}(X > n\epsilon)$$

   da cui, per ogni $q \in \mathbb{Q}_+$,

$$\mathbb{P}(X > q\epsilon) = \mathbb{P}(X > \epsilon)^q = a^q;$$

   ora essendo $\{q\epsilon\}_{q\in\mathbb{Q}_+}$ un insieme denso in $[0, +\infty)$ si ha che, scelto $\alpha \in [0, +\infty)$, esiste una sequenza decrescente $\{q_n\}$ in $\mathbb{Q}_+$ tale che $\alpha_n \downarrow \alpha/\epsilon$ da cui, per la continuità da destra

$$\mathbb{P}(X > \alpha) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X > q_n\epsilon) = \lim_{n\to+\infty} a_n^q = a^\alpha.$$

Soluzione esercizio 10.

1. Verifichiamo che f sia una densità:

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \lambda\alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t^\alpha}\,dt = \int_0^{+\infty} \lambda e^y\,dy = 1$$

   abbiamo effettuato il cambio di variabili $y = t^\alpha$, la funzione di ripartizione perciò, se $x > 0$:

$$F_T(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \lambda\alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t^\alpha}\,dt = \int_0^{x^\alpha} \lambda e^y\,dy = 1 - e^{-\lambda x^\alpha}$$

   altrimenti $F_T(x) = 0$.

2. Per $s > 0$:

$$\mathbb{P}(T > t + s | T > s) = \mathbb{P}(T > t + s)/\mathbb{P}(T > s) = e^{-\lambda[(t+s)^\alpha - s^\alpha]}$$

   $\mathbb{P}(T > t + s|T > s)$ è strettamente crescente se la sua derivata prima è positiva, calcoliamo la derivata prima:

$$v(s) = \frac{d(e^{-\lambda[(t+s)^\alpha - s^\alpha]})}{ds} = -\lambda\alpha((t + s)^{\alpha-1} - s^{\alpha-1})e^{-\lambda[(t+s)^\alpha - s^\alpha]}$$

Notiamo che il segno di v non dipende da λ essendo per ipotesi un valore positivo. Abbiamo che per ogni $t > 0$ e $\lambda > 0$:

$$v(s) \begin{cases} \text{positiva strettamente} & \text{se } \alpha < 1 \\ \text{negativa strettamente} & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

quindi

$$\mathbb{P}(T > t + s | T > s) \begin{cases} \text{cresce} & \text{se } \alpha < 1 \\ \text{decresce} & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

per $\alpha = 1$ è costante.
Se l'apparecchio è soggetto ad usura mi aspetto che $\mathbb{P}(T > t + s|T > s)$ decresca al crescere di s quindi modellizzo il suo tempo di vita con una legge di Weibull di parametri $\alpha > 1$ e $\lambda > 0$.

Remark 20 *Si noti che se $X \sim$ esp(λ) allora $X^{1/\alpha}$ ha legge di Weibull di parametri α e λ.*

Soluzione esercizio 11.

1. Dal teorema fondamentale del calcolo integrale, se f è integrabile in (a, b) e continua (risp. continua da destra, continua da sinistra) in $x_0 \in (a, b)$ allora $x \mapsto \int_a^x f(s)\mathrm{d}s$ è differenziabile in x_0 (risp. derivabile da destra, derivabile da sinistra) con derivata $f(x_0)$. Essendo $F(X) \in (0, 1)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ allora, per il teorema delle derivazione di funzione composta si ha che $H(x) := -\log(1 - F(x))$ è differenziabile e vale
$$H' = \frac{F'(x)}{1 - F(x)} = \frac{f(x)}{1 - F(x)}.$$

2. Poiché $\mathbb{P}(X \le t + h|X > t) = \int_t^{t+h} f(s)\mathrm{d}s$ (se $h > 0$), allora
$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h}\mathbb{P}(X \le t + h|X > t) = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \frac{\int_t^{t+h} f(s)\mathrm{d}s}{1 - F(t)}$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left. \frac{\int_{-\infty}^x f(s)\mathrm{d}s}{1 - F(t)} \right|_{x=t} = h(t).$$

3. Sia $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ tale che
$$\int_{-\infty}^{t_i} f(s)\mathrm{d}s = 1 - 1/2^i$$
allora, definito $t_0 := -\infty$,
$$\int_{\mathbb{R}} h(s)\mathrm{d}s = \sum_{i \in \mathbb{N}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} h(s)\mathrm{d}s$$
$$\ge \sum_{i \in \mathbb{N}} 2^i \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s)\mathrm{d}s = \sum_{i \in \mathbb{N}} 1/2 = +\infty.$$

4. Si consideri, a t fissato, la funzione $g(s) := \mathbb{P}(X > t + s | X > t)$ con $s \in [0, +\infty)$. Evidentemente, dalla definizione, $F = 1 - \exp(-H)$ pertanto

$$\begin{aligned} g(s) &= \frac{\mathbb{P}(X > t+s)}{\mathbb{P}(X > t)} = \frac{1 - F(t+s)}{1 - F(t)} \\ &= \exp(H(s) - H(t+s)) = \exp\left(- \int_s^{t+s} h(x) \mathrm{d}x \right). \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} X \sim \exp(\lambda) &\Leftrightarrow 1 - F(x) = \exp(-\lambda x) 1_{[0,+\infty)}(x) \\ &\Leftrightarrow H(x) = \lambda x 1_{[0,+\infty)}(x) \Leftrightarrow h(x) = \lambda 1_{[0,+\infty)}(x). \end{aligned}$$

Soluzione esercizio 12.

Si ricordi che se X è una variabile aleatoria di legge $\mathbb{P}_X$ allora, data una funzione f (borel) misurabile si ha che la legge di $f \circ X$ ha legge $\mathbb{P}_{f \circ X}(A) = \mathbb{P}_X(f^{-1}(A))$. Pertanto, se T è il numero di teste in 10 lanci, allora $X = |2T - 10|$. Quindi: $X \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$:

$$p_X(k) = \begin{cases} \binom{10}{5} \frac{1}{2^{10}} & \text{se } k = 0 \\ \\ \binom{10}{5+k/2} \frac{1}{2^9} & \text{se } k = 2, 4, 6, 8, 10 \\ \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Soluzione esercizio 13.

1. L'osservazione di un treno è una prova di Bernoulli con "successo" se il treno è in ritardo, il che avviene con probabilità $p = 1/4 = 0.25$. Le prove si possono ritenere indipendenti. Il numero X di treni in ritardo su $n = 10$ osservati ha legge $B(10, 0.25)$, da cui la probabilità cercata

$$\mathbb{P}(X > 2) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 2) =$$

$$1 - \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} 0.25^0 \cdot 0.75^{10} - \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix} 0.25^1 \cdot 0.75^9 - \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} 0.25^2 \cdot 0.75^8 = 0.4744.$$

2. Si considerino gli eventi
   A:="il primo treno in ritardo è il quinto o uno dei seguenti"
   B:="i primi quattro treni sono in orario"
   C:="non sono stati osservati treni in ritardo"
   (si supponga che vengano fatte almeno quattro osservazioni). Si ha facilmente $A \cap C = \emptyset$ e $A \cup C = B$ pertanto $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(C)$. Ora $\mathbb{P}(B) = (1-p)^4 = 0.75^4$, mentre $\mathbb{P}(C)$ dipende dal numero di osservazioni

fatte:
su n osservazioni ($n \geq 4$) si ha che $\mathbb{P}(A) = (1-p)^n$ da cui $\mathbb{P}(A) = 0.75^4 - 0.75^n$;
su infinite osservazioni $\mathbb{P}(C) = 0$ da cui $\mathbb{P}(A) = 0.75^4$.

3. Si ragiona come nel punto a) con $p = 0.01$, $n = 200$ e $X \sim B(200, 0.01)$. Usando l'approssimazione di Poisson

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda), \qquad \lambda = np = 200 \cdot 0.01 = 2,$$

si ottiene la probabilità cercata

$$\mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=1) = e^{-2}\frac{(2)^0}{0!}+e^{-2}\frac{(2)^1}{1!} = e^{-2}(1+2) = 0.4060.$$

Soluzione esercizio 14.
Ricordiamo che una funzione $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ è una desità di v.a. assolutamente continua se e solo se (i) $f \geq 0$, (ii) f integrabile e (iii) $\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = 1$.

Le $3), 6), 7)$ non sono densità. Le altre:
1) $F(x) = x^3 I_{[0,1)}(x) + I_{[1,+\infty)}(x)$.
2) È densità se e solo se $\theta \in [0,1]$ e $F(x) = \frac{\theta x}{2} I_{[0,1)}(x) + (\frac{x}{2} + \frac{\theta-1}{2}) I_{[1,2)}(x) + \frac{3\theta-1+(1-\theta)x}{2} I_{[2,3)}(x) + I_{[3,+\infty)}(x)$.
4) $F(x) = \frac{x^2}{2} I_{(0,1)}(x) + \frac{1}{2} I_{[1,2)}(x) + (1 - \frac{(3-x)^2}{2}) I_{[2,3)}(x)) + I_{[3,+\infty)}(x)$.
5) $F(x) = \frac{x-a}{b-a} I_{[a,b)}(x) + I_{[b,+\infty)}(x)$.
8) $F(x) = (1 - x^{-1}) I_{[1,+\infty)}(x)$.

Soluzione esercizio 15.
Si osservi che f è non negativa oppure non positiva, pertanto la condizione $\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = 1$ è necessaria e sufficiente affinché f sia una densità di v.a. assolutamente continua.

$$1 = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = \frac{k}{2}(-e^{-x^2})\Big|_0^{+\infty} = \frac{k}{2} \Longleftrightarrow k = 2$$

e

$$\mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(X < 1) = \int_{-\infty}^{1} = (-e^{-x^2})\Big|_0^1 = 1 - e^{-1}.$$

Soluzione esercizio 16.
Sia X la variabile aleatoria a valori in I di legge $\mathbb{P}(X = i) = p_i$, $\forall i \in I$ e siano $\{C_i\}_{i \in I}$ le variabili non negative che controllano il volume delle puntante su ciascun valori $i \in I$ sia $C := \sum_{i \in I} C_i$ e si assuma che quest' ultima variabile sia integrabile.

All'uscita del valore I corrisponde un guadagno degli organizzatori pari a $C - C_i q_i$ quindi la variabile "guadagno" è

$$G := C - C_X q_X = \sum_{i \in I} C_i (1 - q_i 1_{X=i}).$$

Dal Teorema di convergenza monotona e dall'ipotesi di indipendenza si ha

$$\mathbb{E}[G] = \sum_{i \in I} \mathbb{E}[C_i](1 - p_i q_i);$$

Osserviamo che, banalmente, presa una successione $\{h_i\}_i$ di valori non negativi allora

$$\sum_i h_i r_i \geq 0 \,(\text{risp.} \ > 0), \ \forall \{r_i\} : r_i \geq 0, \sum_i r_i = 1 \iff h_i \geq 0 \,(\text{risp.} \ > 0) \ \forall i;$$

da cui si ottiene la condizione necessaria e sufficiente $p_i q_i < 1$, per ogni $i \in I$.

Oss. Si osservi che la condizione di indipendenza, che traduce l'ignoranza da parte dello scommettitore del risultato finale, risulta necessaria affinché si possa trovare una strategia; se infatti $C := \delta_{i,X}$ allora nessuna strategia sarebbe attuabile allo scopo di ottenere un valore atteso positivo.

Soluzione esercizio 17.

1. Sia A misurabile allora,

   $$\{C_N \in A\} = \cup_{i \in I}\{C_N \in A, N = i\} = \cup_{i \in I}\{C_i \in A, N = i\}$$

   pertanto è misurabile.

2. $$\begin{aligned} \mathbb{P}(C_N \in A) &= \sum_{i \in I} \mathbb{P}(C_N \in A | N = i)\mathbb{P}(N = i) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(C_i \in A | N = i)\mathbb{P}(N = i) \\ &= \sum_{i \in I} \mathbb{P}(C_N \in A)\mathbb{P}(N = i) \end{aligned}$$

   dove, nell'ultima uguaglianza, abbiamo utilizzato l'ipotesi di indipendenza.

3. L'integrabilità di C_N è garantita dalla scomposizione

   $$C_N = \sum_{i \in I} 1_{\{N=i\}} C_i$$

   e dal Teorema della convergenza monotona.

   Analogamente al caso precedente, o direttamente dalla scomposizione precedente,

   $$\begin{aligned} \mathbb{E}[C_N] &= \sum_{i \in I} \mathbb{E}[C_N | N = i]\mathbb{P}(N = i) = \sum_{i \in I} \mathbb{E}[C_i | N = i]\mathbb{P}(N = i) \\ &= \sum_{i \in I} \mathbb{E}[C_N]\mathbb{P}(N = i). \end{aligned}$$

4. Dai punti precedenti

$$\mathbb{P}(C_N = j_0) = \sum_{i \geq j_0} \frac{1}{i} p(1-p)^{i-1}.$$

Da noti teoremi sulle serie di potenze si ha che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p} \sum_{i \geq j_0} (1-p)^i \frac{1}{i} = - \sum_{j \geq j_0} (1-p)^{i-1} = - \frac{(1-p)^{j_0-1}}{p}$$

pertanto

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C_n = j_0) &= \frac{1-p}{p} \int_p^1 \frac{(1-s)^{j_0-1}}{s} \mathrm{d}s \\
&= \frac{1-p}{p} \int_p^1 \sum_{r=0}^{j_0-1} \binom{j_0-1}{r} (-1)^r s^r \mathrm{d}s \\
&= \frac{1-p}{p} \sum_{r=1}^{j_0-1} \frac{(-1)^r}{r} \binom{j_0-1}{r} (1-p^r) + \frac{1-p}{p} \log \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

Soluzione esercizio 18.

Cominciamo col notare che se abbiamo una successione $\{X_i\}$ di variabili i.i.d. a valori in un insieme finito K e una sequenza finita di elementi di K, allora il lemma di Borel-Cantelli garantisce che $\mathbb{P}$-q.c. la la sequenza viene ripetuta nella successione (addirittura finendo in un lancio che sia multiplo intero della lunghezza della sequenza stessa). Pertanto la probabilità che il numero di lanci da attendere sia finito è 1.

Si considerino i seguenti eventi

$A :=$ "Nel primo lancio è uscito C"
$B :=$ "Nei primi due lanci è uscita la coppia (T, C)"
$C :=$ "Nei primi due lanci è uscita la coppia (T, T)"

Definita, per ogni variabile integrabile X ed ogni evento E di probabilità positiva

$$\mathbb{E}(X|A) := \int \mathbb{1}_A X \mathrm{d}\mathbb{P}$$

allora dal teorema delle probabilità totali si può mostrare che

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i \in J} E(X|E_j)$$

se $\{E_j\}$ è una sequenza di eventi al più numerabile tale che $\mathbb{P}(E_i \cap E_j) = 0$ per ogni coppia $i\mathrm{d}j$ e $\mathbb{P}(\cup_{i \in J} E_j) = 1$. Sia $M := \mathbb{E}(N)$ dove N è il numero di lanci occorrenti affinchè esca al coppia (T,T), quest'ultimo, essendo non superiore al numero di lanci occorenti affinché esca la coppia (T,T) in due lanci rispettivamente dispari/pari (che è finita poiché è una successione di Bernoulli), risulta finito. Osserviamo che condizionata ad A, ho gia‘ eseguito un lancio e, per l'indipendenza (e per identica distribuzione), il numero medio di lanci ancora da fare perché esca la coppia (T,T) è ancora M da cui $\mathbb{E}(N|A) = M+1$. Similmente $\mathbb{E}(N|B) = M+2$ ed evidentemente $\mathbb{E}(N|C) = 2$ da cui

$$M = \mathbb{E}(N|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{E}(N|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{E}(N|C)\mathbb{P}(C) = (M+1)\frac{1}{2} + (M+2)\frac{1}{4} + 2\frac{1}{4}$$

da cui l'unica soluzione è $M = 6$.

Similmente si verifica che il numero di lanci medio nel secondo caso è anch'esso finito (sia sempre M); si considerino i seguenti due eventi

$$A := \text{“Nel primo lancio è uscito } C\text{”}$$
$$D := \text{“Nel primo lancio è uscito } T\text{”}$$

Allora condizionata ad A si ha che un lancio è già stato fatto e dall'indipendenza (e dalla identica distribuzione) delle prove, il numero di lanci medio da attendere ancora è lo stesso quindi $\mathbb{E}(N|A) = M+1$; dall'altra parte, condizionata a B, l'evento atteso si avrà alla prima uscita di C, per cui il numero medio di lanci da attendere ancora sarà quello di primo successo di un processo di Bernoulli con parametro $1/2$ cioè 2 quindi $\mathbb{E}(N|B) = 3$. Pertanto

$$M = (M+1)\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2}$$

che ammette come unica soluzione $M = 4$.

Quindi i valori attesi sono differenti pur essendo uguali le probabilità degli eventi “esce prima (T,T) che (T,C)” e “esce prima (T,C) che (T,T)”.

Osservazione. La generalizzazione di questo problema è la seguente: sia $\{X_i,\}$ una successione i.i.d. a valori in $\{1,\dots,n\}$ distribuita secondo la seguente legge

$$\mathbb{P}(X_1 = i) = p_i, \qquad i = 1,\dots,n,$$

dove $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Sia $(a_1,\dots,a_k) \in \{1,\dots,n\}^k$ una prefissata sequenza e sia $N := \min\{j \geq k : X_{j-k+1} = a_1,\dots,X_j = a_k\}$. Allora definito

$$b_j := \begin{cases} 1 & \text{se } a_1 = a_{k-j+1}, a_2 = a_{k-j+2},\dots,a_j = a_k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad j = 1,\dots,k$$

allora si ha che

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{j=1}^k b_j n^j.$$

Dal momento che $b_k = 1$ si ha che $\mathbb{E}(N) \geq n^k$.

La dimostrazione non è molto difficile ma coinvolge il concetto di martingala che non sarà considerato in questo corso, pertanto questo risultato è da considerarsi puramente una curiosità. Si provi ad esempio a calcolare quanti tasti si devono premere (a caso) in una tastiera con le dieci cifre, prima di comporre in sequenza un codice segreto (ad esempio di un antifurto) composto da 4 cifre.

Soluzione esercizio 19.
Senza perdita di generalità ci si potrebbe anche limitare al caso $X = \mathbb{N}$. Si consideri l'evento $A := \{\exists x \in X : Z_x = x\}$, in tal caso dall'indipendenza si ha

$$\mathbb{P}(A^c) = \prod_{x \in X} (1 - p_x) = \exp\left(\sum_{x \in X} \log(1 - p_x))\right)$$

dove l'ultima uguafglianza si può scrivere se e solo se $p_x < 1$ per ogni $x \in X$; in caso contrario, evidentemente $\mathbb{P}(A) = 1$. Inoltre,

$$\log(1 - p_x) \leq -p_x$$

e vale l'uguaglianza se e solo se $p_x = 0$, allora, nel caso $p_x < 1$ per ogni $x \in X$, si ha

$$\exp\left(\sum_{x \in X} \log(1 - p_x)\right) < \exp\left(-\sum_{x \in X} p_x\right) = e^{-1}$$

da cui

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) > 1 - \frac{1}{e}.$$

Infine nella soluzione di un esercizio delle lezioni precedenti abbiamo visto che, se $p_x < 1$ per ogni $x \in X$ allora

$$\prod_{x \in X} (1 - p_x) > 0 \Longleftrightarrow \sum_{x \in X} p_x < +\infty$$

pertanto $\mathbb{P}(A) < 1$.

Osservazione: se $\mathrm{card}\{x \in X : p_x > 0\} = n < +\infty$ allora si può mostrare (provare con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange) che

$$\mathbb{P}(A) \in \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n, 1\right]$$

e vale $\mathbb{P}(A) = 1$ se e solo se $p_x = 1$ per qualche $x \in X$ e $\mathbb{P}(A) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ se e solo se $p_x = 1/n$ per ogni $x \in X$.