7 Esercitazione 7: / /

7.1 Densità continue, funzioni di variabile aleatoria

Esercizio 1 *[Compito d'esame del 9.05.2002] Si consideri X la v.a. che ammette la seguente densità:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-(x-\lambda)} & x > \lambda \\ 0 & x \leq \lambda \end{cases}$$

1. *Determinare $\lambda > 0$ in modo che sia effettivamente una densità e per tale λ calcolare la funzione di ripartizione.*
2. *Poniamo $Y = e^X$, si determini la densità di Y, calcolare $\mathbb{E}(Y)$ e $\mathbb{E}(Y^2)$.*
3. *Si calcoli $\mathbb{P}(X > 3)$ e $\mathbb{P}(X^3 > 27)$.*
4. *Si calcoli la media di $3X^2 - 1$.*
5. *Stimare la probabilità che X assuma valori distanti dalla media più di 2 unità, utilizzando la diseguaglianza di Chebychev.*

Esercizio 2 *[Compito d'esame 21.06.2001] Sia X una v.a. esponenziale aleatoria di media $\frac{1}{\lambda}$.*

1. *Calcolare la densità di $T = X^2$.*
2. *Calcolare la funzione di ripartizione F_T e la media $\mathbb{E}(T)$.*
3. *Supponiamo che T rappresenti l'istante, espresso in anni, in cui si rompe un certo modello di computer. Sappiamo che dobbiamo utilizzare il computer solo per 2 anni (poi diventa obsoleto). Ci rechiamo dal venditore e questo ci propone due computer del modello che ci serve ma uno è nuovo mentre l'altro è perfettamente funzionante ma è stato usato per un anno. Quale dei due computer è più probabile che duri, senza guastarsi, i due anni per i quali ne abbiamo bisogno?*

Esercizio 3 *[Compito d'esame 9-09-99 MPSPS] Un'industria produce su commissione delle sbarre d'acciaio cilindriche, il cui diametro dovrebbe essere di 4 cm, ma che tuttavia sono accettabili se hanno diametro compreso fra 3.95 cm e 4.05 cm. Il cliente, nel controllare le sbarre fornitegli, constata che il 5% sono di diametro inferiore al minimo tollerato ed il 12% di diametro superiore al massimo tollerato.*

1. *Supponendo che le misure dei diametri seguano una legge normale, determinarne media e deviazione standard.*
2. *Mantenendo la media precedentemente calcolata, determinare quale dovrebbe essere il valore delle deviazione standard affinché la probabilità che le sbarre abbiano un diametro superiore al massimo tollerato sia minore del* 5%.

Esercizio 4 *Il tempo necessario a Vladimiro Lento per coprire il percorso casa-ufficio è una variabile aleatoria di legge normale. Se il tempo medio è di 30 minuti e la probabilità di coprire il percorso in più di 40 minuti è 0.1, quanto vale la probabilità di coprire il percorso in più di 50 minuti?*

Esercizio 5 *La durata in ore di una lampadina della ditta* Fulminati *segue una legge normale di media 2000 e varianza σ^2. Se un compratore richiede che almeno il 90% di esse abbia una durata superiore alle 1500 ore, qual'è il valore massimo che σ può assumere per soddisfare l'esigenza dell'acquirente?*

Esercizio 6 * *Un operatore, in attesa dell'apertura del mercato azionario, decide di comperare un pacchetto di azioni se la differenza tra il prezzo all'apertura e quello alla chiusura della sera precedente sarà compreso tra a e b ($a < b \in \mathbb{R}$). Supponendo che la variazione di prezzo segua una legge normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, qual'è il valore di σ in corrispondenza al quale si ha la massima probabilità di comperare?*

Esercizio 7 *Sia $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.*

1. *Determinare la densità di $Y = e^X$.*
2. *Calcolare i momenti di Y.*
3. *Quanto valgono media e varianza di Y?*

Esercizio 8 * *Sia X una v.a., mostrare che:*

1. *X è integrabile se e solo se*

$$\int_0^{+\infty} (1 - F_X(t))\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^0 F_X(t)\mathrm{d}t < +\infty$$

2. *se X ammette media allora*

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} (1 - F_X(t))\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^0 F_X(t)\mathrm{d}t$$

In particolare se X è quasi certamente non negativa allora

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} (1 - F_X(s))\mathrm{d}s$$

da cui, se X è discreta a valori in $\mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq i) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > i)$$

Esercizio 9 *Sia X una variabile aleatoria a valori in uno spazio normato. Mostrare che*

$$\mathbb{E}(\|X\|^p) = \int_{[0,+\infty)} (1 - F_{\|X\|}(s^{1/p})) = \int_{[0,+\infty)} \mathbb{P}(\|X\|^p \geq s).$$

Esercizio 10 *Sia X una variabile aleatoria q.c. positiva e $\{r_n\}$ una successione reale crescente tale che $r_0 = 0$ e $\lim_{n\to+\infty} r_i = +\infty$. Se $\sum_{i=0}^{\infty}(r_{i+1} - r_i)\mathbb{P}(X \in [r_i, r_{i+1})) < +\infty$ (ad esempio se $\sup_i(r_{i+1} - r_i) < +\infty$) allora*

$$\mathbb{E}(X) < +\infty \Longleftrightarrow \sum_{i=0}^{\infty}(r_{i+1} - r_i)\mathbb{P}(X > r_i) < +\infty.$$

Nella precedente relazione si può prendere equivalentemente $\sum_{i=0}^{\infty}(r_{i+1} - r_i)\mathbb{P}(X \geq r_i)$.

Esercizio 11 *Sia $\{X_n\}$ una successione di variabili aleatorie xi.d. (non necessariamente indipendenti) tali che $\mathbb{E}(|X_n|) < +\infty$ e $\{Y_n\}$ tali che $Y_n \mathbb{1}_{|X_n| \leq n} = X_n \mathbb{1}_{|X_n| \leq n}$. Allora*

$$X_n = Y_n \text{ definitivamente } \mathbb{P} - q.c.$$

Esercizio 12 *Un dado bilanciato viene lanciato più volte, sia Y la variabile aleatoria che conta il numero di lanci necessari per ottenere 5 oppure 6. Si calcoli $\mathbb{E}(Y)$ e $\mathrm{var}(Y)$.*

Esercizio 13 *Sia $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$. Determinare le funzioni di densità, la media e la varianza delle seguenti variabili aleatorie:*

1. $Y_1 = U - \frac{1}{2}$,
2. $Y_2 = |U - \frac{1}{2}|$,
3. $Y_3 = (U - \frac{1}{2})^2$,

4. $Y_4 = \frac{1}{(U+1/2)}$,

5. $Y_5 = -\frac{\ln(U)}{\lambda}$, *dove* $\lambda > 0$.

Esercizio 14 *[Compito d'esame del 22.02.2000] Si consideri una variabile aleatoria discreta* X *tale che* $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{\theta}{2(1+\theta)}$ *e* $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{1+\theta}$, $\theta > 0$.

1. *Calcolare la media e la varianza di* X.

2. *Determinate la funzione di densità della variabile aleatoria* $Y = X^2$ *e calcolarne media e varianza.*

Esercizio 15 *Sia* X *è una variabile aleatoria che ammette media e varianza. Mostrare che:*

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \alpha) \leq \frac{\mathrm{var}(X)}{\alpha^2}.$$

Anche questa disuguaglianza è nota con il nome di disuguaglianza di Chebychev. Per ogni valore $\alpha > 0$ *trovare una variabile aleatoria per cui questa disuguaglianza di Chebyshev sia in effetti un'uguaglianza .*

Esercizio 16 *Sia* X *è una funzione misurabile reale su* $(\Omega, \mathbb{F}, \mu)$ *(si pensi pure ad una variabile aleatoria su uno spazio di probabilità) e sia* $\phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *non decrescente tale che* $\phi(|X|)$ *sia integrabile (ammetta media nel caso probabilistico). Mostrare che:*

$$\mathbb{P}(|X| \geq \alpha) \leq \frac{\int_\Omega (\phi(|X|))}{\phi(\alpha)} \qquad \forall \alpha > 0.$$

Esercizio 17 * *Sia* X *una variabile aleatoria di media* m *e varianza* $\sigma^2 (\sigma > 0)$, *mostrare che:*

1. *per ogni* $\alpha \geq 0$, $\mathbb{P}(X - m \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2+\alpha^2}$.

2. *per ogni* $\alpha \geq 0$, $\mathbb{P}(X - m \leq -\alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2+\alpha^2}$.

3. *per ogni* $\alpha \geq 0$, $\mathbb{P}(|X - m| \geq \alpha) \leq \frac{2\sigma^2}{\sigma^2+\alpha^2}$.

4. *Considerando una variabile aleatoria che assume solo due valori mostrare che può valere l'uguaglianza nelle formule precedenti.*

Esercizio 18 *Due urne contengono* 50 *dadi ciascuna, in una i dadi sono bilanciati, nell' altra i dadi sono truccati in modo che la probabilità di ottenere* 1 *sia* $\frac{1}{2}$ *e la probabilità di ottenere ogni altro risultato è* $\frac{1}{10}$.

1. *Un dado viene estratto a caso (probabilità uniforme) da una delle due urne e lanciato, sia X la v.a. che indica il risultato del lancio. Si calcoli la probabilità di ottenere un* 3 *e la media di* X.

2. *Consideriamo il seguente esperimento: un dado viene estratto a caso e viene lanciato due volte. Siano* A *l'evento "al primo lancio ottengo* 2*"e* B *" al secondo lancio ottengo* 3*", i due eventi sono indipendenti fra di loro?*

Esercizio 19 *In un esame universitario il voto medio è stato* 24 *con una deviazione standard di* 4 *punti; si supponga che i voti siano distribuiti secondo una legge normale.*

1. *Calcolare la probabilità che uno studente abbia riportato un voto superiore a* 27.

2. *Calcolare la probabilità che uno studente abbia riportato un voto inferiore a* 22.

3. *Qual è il voto superato dal* 70% *degli studenti, ma non dal restante* 30%*?*

4. *Qual è il voto non superato dal* 90% *degli studenti e superato dal restante* 10%*?*

Esercizio 20 *[Compito d'esame 30-06-99 MPSPS] L'errore accidentale nelle misurazioni di lunghezze effettuate con un calibro di precisione dipende del tasso di umidità ambientale. Modellizziamo tale errore (espresso in cm) con una v.a.* X *e supponiamo che se l'ambiente è umido la distribuzione di* X *sia* $\mathcal{N}(0; 0.25)$, *mentre se l' ambiente è secco la distribuzione di* X *sia* $\mathcal{N}(0, 0625)$. *Si è costatato che le misure vengono effettuate in ambiente secco solamente nel* 20% *dei casi.*

1. *Qual è la probabilità che in una misurazione si abbia* $|X| < 0.6$ *?*

2. *Sapendo che in una misurazione si è verificato che* $|X| < 0.6$, *qual è la probabilità che essa sia stata effettuata in ambiente umido ?*

Esercizio 21 *Sia* N *una v.a. gaussiana di media* 0 *e varianza* σ^2*; si ponga* $M = \max\{0, N\}$.

1. *Quanto valgono* $\mathbb{P}(M < 0)$ *e* $\mathbb{P}(M \leq 0)$*?*

2. *Trovare un'espressione per la funzione di ripartizione di* M.

3. *Verificare che* $\mathbb{E}(M) = \frac{\sigma}{2\sqrt{2\pi}}$.

Esercizio 22 ** *Siano* (Y, Σ), (Φ, Σ_1) *e* (Φ_1, Σ_2) *tre spazi misurabili ed* $X : Y \to \Phi$, $f : \Phi \to \Phi_1$ *due funzioni. Definiamo le* σ*-algebre* $f^{-1}(\Sigma_2)$ *su* Σ_X *su* Φ

$$f^{-1}(\Sigma_2) := \{A \subseteq \Phi : \exists B \in \Sigma_2 : A = f^{-1}(B)\}$$
$$\Sigma_X := \{A \subseteq \Phi : X^{-1}(A) \in \Sigma\}.$$

Mostrare che $f^{-1}(\Sigma_{1f}) \subseteq \Sigma_1$ *e* $(f^{-1}(\Sigma_2))_f \supseteq \Sigma_2$ *ed in generale l'inclusione è propria (esempi).*

Mostrare che X *è misurabile se e solo se* $X^{-1}(\Sigma_1) \subseteq \Sigma$ *o, equivalentemente,* $\Sigma_X \supseteq \Sigma_1$.

Mostrare che $f \circ X$ *è* $\Sigma_2 - \Sigma$*-misurabile se e solo se* X *è* $f^{-1}(\Sigma_2) - \Sigma$*-misurabile o, equivalentemente,* f *è* $\Sigma_2 - \Sigma_X$*-misurabile.*

Se ora $\phi_1 \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ *ed* f, X *sono misurabili, fissato* $A \in \Sigma$, *e se* μ *è una misura su* Y, *mostrare che*

$$F \circ X \text{ è } \mu\text{-integrabile su } X^{-1}(A) \Longleftrightarrow f \text{ è } \mu_X\text{-integrabile su } A$$

(con $\mu_X(\cdot) := \mu(X^{-1}(\cdot))$*) ed in tal caso vale*

$$\int_A f \mathrm{d}\mu_X = \int_{X^{-1}(A)} f \circ X \mathrm{d}\mu.$$

In particolare se X, Y *sono variabili aleatorie con la stessa legge e* f *è misurabile allora* $f \circ X$ *ammette media se e solo se* $f \circ Y$ *ammette media ed in tal caso vale* $\mathbb{E}(f(X)) = \mathbb{E}(f(Y))$.

Esercizio 23 *** *Sia* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *dove* $(\Omega, \mathbb{F}, \mu)$ *è uno spazio misurabile (si pensi pure ad uno spazio di probabilità). Si dice range essenziale di* f *l'insieme*

$$\mu - \mathrm{essRg}(f) := \{y : \forall U \in \mathcal{U}_y, \mu(f^{-1}(U)) > 0\}$$

dove $\mathcal{U}_y$ *è l'insieme degli intorni del punto* y.

Sia ora $\phi : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ *una funzione Borel-misurabile tale che* $\phi \circ f$ *sia* μ*-integrabile e sia* A *un insieme di Borel tale che*

$$a := f - \mathrm{essinf}_A \phi := \inf \mu_f - \mathrm{essRg}(\phi|_A) > 0.$$

Allora vale

$$\mu(f \in A) \le \frac{\int_{f^{-1}(A)} \phi \circ f \mathrm{d}\mu}{a} \le \frac{\int_\Omega \phi \circ f \mathrm{d}\mu}{a}.$$

Inoltre

$$\mu(f \in A) = \frac{\int_{f^{-1}(A)} \phi \circ f \mathrm{d}\mu}{a} \Longleftrightarrow \mu(f \in A, \phi \circ f > a) = 0$$

e

$$\mu(f \in A) = \frac{\int_\Omega \phi \circ f \mathrm{d}\mu}{a} \Longleftrightarrow \begin{cases} \mu(f \in A, \phi \circ f > a) = 0 \\ \mu(f \notin A, \phi \circ f > 0) = 0. \end{cases}$$

(Hint: si utilizzi il fatto che $\mu_f(x \in A : \phi(x) < a) = 0$*).*

Esercizio 24 *** **(Esclusivamente propedeutico per l' esercizio 25)** *Sia* $(\Omega, \mathbb{F}, \mu)$ *uno spazio di misura (si pensi pure ad uno spazio di probabilità) dove* $\mathbb{F}$ *è la sigma algebra generata da una topologia* τ *(i.e.* $\mathbb{F} = \sigma(\tau)$*); si definisca*

$$\begin{aligned}\mathrm{essdom}(\mu) &:= \{y \in \Omega : \forall U \in \tau : y \in U \Rightarrow \mu(U) > 0\} \\ &\equiv \{y \in \Omega : \forall U \in \{\mathcal{U}_y \Rightarrow \mu(U) > 0\}\end{aligned}$$

dove $\mathcal{U}$ *è l'insieme degli intorni di* y*. Si mostri che* essdomμ *è chiuso (i.e.* $\mathrm{essdom}(\mu)^c \in \tau$*) e che vale*

$$\mathrm{essdom}(\mu) = \left(\bigcap_{M \in \tau : \mu(M) = 0} M \right)^c.$$

Infine si mostri che, se la topologia τ *ammette una base numerabile (i.e. esiste un insieme al più numerabile* $\mathcal{A} \subset \tau$ *tale che per ogni aperto* $M \in \tau$ *si ha* $M = \cap_{N \in \mathcal{A} : N \subseteq M} N$*), allora* $\mu(\mathrm{essdom}(\mu)^c) = 0$.

Esercizio 25 *Siano* $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ *e* (Y, τ) *rispettivamente uno spazio di probabilità e uno spazio topologico (si pensi pure all'insieme dei reali con la topologia indotta dalla distanza euclidea). Sia* $f : \Omega \to Y$ *una variabile aleatoria, il suo Range essenziale definito come nell'esercizio 23 (il quale coincide con* $\mathrm{essdom}(\mathbb{P}_f)$ *definito nell'esercizio 24) e la sua legge* $\mathbb{P}_f =: \mu$*. (definita su* $\sigma(\tau)$*)). Si consideri una successione di variabili aleatorie* $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ *i.i.d. distribuite secondo la legge* μ*. Si mostri che tutte le variabili hanno medesimo Range essenziale (quello di* f*); si mostri altresì che*

$$\begin{aligned}y \in \mathbb{P} - \mathrm{essRg}(f) &\iff \forall U \in \mathcal{U}_y : \mathbb{P}(\exists i \in \mathbb{N} : X_i \in U) = 1 \\ &\iff \forall U \in \mathcal{U}_y : \mathbb{P}(\limsup_i X_i \in U) = 1.\end{aligned}$$

Se ne deduca che $\mathbb{P}$*-q.c. l'insieme* $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ *è denso in* $\mathrm{essRg}(f)$*. (Se* $A, B \subset Y$ *allora* A *è denso in* B *se e solo se per ogni* $C \in \tau$ *tale che* $C \cap B \neq \emptyset$ *si ha* $C \cap B \cap A \neq \emptyset$*).*

Infine si mostri che se la topologia τ *ammette una base numerabile (si veda l'esercizio 24) allora si ha che* $\mathbb{P}(\exists i \in \mathbb{N} : X_i \in \mathrm{essRg}(f)^c) = 0$.

SOLUZIONI

Soluzione esercizio 1.

1. Dobbiamo trovare λ tale che: $\int_\lambda^{+\infty} \lambda e^{-(x-\lambda)}\, dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-y}\, dy = 1$, quindi $\lambda = 1$. Notiamo che $X = T + 1$ dove $T \sim \exp(1)$.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x e^{-(t-1)}\, dt = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 - e^{-(x-1)} & x \geq 1 \end{cases}$$

2. Notiamo che $\mathbb{P}(X > 1) = 1$, si ha quindi $Y = e^X = g(X) > e$ e $g : (1, +\infty) \to (e, +\infty)$ ha derivata continua e strettamente positiva. Inoltre $g^{-1}(y) = \ln(y)$ e $\frac{d}{dy}\ln(y) = \frac{1}{y}$, quindi:

$$f_Y(y) = f_X(\ln(y))\frac{1}{y}I_{(e,+\infty)}(y) = e\frac{1}{y^2}I_{(e,+\infty)}(y)$$

Quindi $\int_{\mathbb{R}} y f_Y(y)\, dy = +\infty$ e $\int_{\mathbb{R}} y^2 f_Y(y)\, dy = +\infty$, ovvero Y non ammette ne' valore atteso ne' momento secondo.

3. $\mathbb{P}(X > 3) = 1 - F_X(3) = e^{-2}$ e $\mathbb{P}(X^3 > 27) = e^{-2}$.

4. $\mathbb{E}(3X^2 - 1) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x)(3x^2 - 1)\mathrm{d}x = 3\mathbb{E}(X^2) - 1 = 15 - 1 = 14$ infatti abbiamo che:
$\mathbb{E}(X^2) = \int_1^{+\infty} t^2 e^{-(t-1)}\, dt = \int_0^{+\infty} (x+1)^2 e^{-x}\, dx = 2 + 2 + 1 = 5$

5. $\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 5 - 2^2 = 1$, quindi per la diseguaglianza di Chebychev:

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > 2) \leq \frac{\mathrm{var}(X)}{4} = \frac{1}{4}$$

Soluzione esercizio 2.

1. Si ha che

$$\begin{aligned} F_T(x) &= \mathbb{P}(T \leq x) = \mathbb{P}(X^2 \leq x) \\ &= \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \mathbb{P}(X \in [-\sqrt{x}, \sqrt{x}]) & x \geq 0 \end{cases} \\ &= 1_{[0,+\infty)}(x)(F_X(\sqrt{x}) - \lim_{s \to -\sqrt{x}^-} F_X(s)) \\ &= 1_{[0,+\infty)}(x)(1 - \exp(-\lambda\sqrt{x})). \end{aligned}$$

Dal Teorema fondamentale del calcolo integrale si ha che:

$$f_T(t) = I_{(0,+\infty)}(t)\frac{\lambda}{2\sqrt{(t)}}e^{-\lambda\sqrt{t}}$$

si tratta di una legge Weibull di parametri $\alpha = \frac{1}{2}$, λ.

2. $\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(X^2) = \mathrm{var}(X) + \mathbb{E}(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2}$. In generale si ricordi che $\mathbb{E}(X) = \int_{[0,+\infty)}(1 - F_X(s))\mathrm{d}s - \int_{(-\infty,0)} F_X(s)\mathrm{d}s$.

3. Il parametro α della legge di T è minore di uno quindi bisogna aspettarsi che sia più conveniente il computer usato (la probabilità di guastarsi in un intervallo fissato di tempo descresce al passare del tempo). Per verificare questo fatto calcoliamo il rapporto:

$$\frac{\mathbb{P}(T > 3 | T > 1)}{\mathbb{P}(T > 2)} = \frac{\mathbb{P}(T > 3)}{\mathbb{P}(T > 1)\mathbb{P}(T > 2)} = e^{-\lambda(\sqrt{(3)} - 1 - \sqrt{(2)})} > 1.$$

Soluzione esercizio 3.

1. Sia $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ con μ e σ incognite.
   Sappiamo che $\mathbb{P}(X < 3.95) = 0.05$ e $\mathbb{P}(X > 4.05) = 0.12$, quindi

   $$0.05 = \mathbb{P}(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{3.95-\mu}{\sigma}) = 1 - \phi(-\frac{3.95-\mu}{\sigma})$$
   $$0.12 = \mathbb{P}(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{4.05-\mu}{\sigma}) = 1 - \Phi(\frac{4.05-\mu}{\sigma})$$

   da cui
   $$\begin{cases} \dfrac{-3.95+\mu}{\sigma} = z_{0.95} \simeq 1.64 \\ \dfrac{4.05-\mu}{\sigma} = z_{0.88} \simeq 1.175 \end{cases}$$

   da cui $\mu = 4.0083$ $\sigma = 0.0355$. Perciò $X \sim \mathcal{N}(4.0083, (0.0355)^2)$.

2. Cerchiamo σ in modo che
   $$0.05 > \mathbb{P}(Z > \frac{4.05-4.008}{\sigma}) = 1 - \Phi(0.042/\sigma)$$
   ovvero
   $$\frac{4.05-4.008}{\sigma} > z_{0.95} = 1.64$$
   ovvero $\sigma < \frac{0.042}{1.64} = 0.0256$

Soluzione esercizio 4.
$1/10 = \mathbb{P}(X > 40) = 1 - \phi((40-30)/\sigma)$ pertanto $\sigma = 10/q(9/10) \approx 10/1.2816 = 7.8027$. Da cui $P(X > 50) \approx 1 - \phi(20/7.8027) = 1 - \phi(2.5632) = 1 - 0.9948 = 0.0052$.

Soluzione esercizio 5.
Se X è la durata della lampadina, l'aquirente richiede $9/10 \leq \mathbb{P}(X \geq 1500) = \mathbb{P}((X-\mu)/\sigma \geq (1500-\mu)\sigma) = 1 - \phi(-500/\sigma)$. Pertanto si ottiene $\sigma \leq -500/q(1/10) = 500/q(9/10) \approx 500/1.2816 \approx 390.137$.

Soluzione esercizio 6.
Sia X la differenza di quotazione, $\mathbb{P}(X \in [a,b]) = f(\sigma)$, dove, dopo un cambio di variabile
$$f(\sigma) = \int_{a/\sigma}^{b/\sigma} \frac{\exp(-s^2/2)}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{d}s.$$
Calcolando la derivata f' e studiando la funzione in $(0, +\infty)$ si trova immediatamente che:

1. se $a \leq 0 \leq b$ ($a < b$) allora f è decrescente, pertanto minore è σ, maggiore è la probabilità che $X \in [a,b]$ (ed il limite per σ che tende a 0^+ di tale valore è 1);

2. se $0 < a < b$ allora si trova che f è decrescente in $(\sqrt{(b^2 - a^2)/(2\ln(b/a))}, +\infty)$ e crescente in $(0, \sqrt{(b^2 - a^2)/(2\ln(b/a))})$, pertanto il massimo è assunto in $\sigma^2 = (b^2 - a^2)/(2\ln(b/a))$.

3. se $a < b < 0$, utilizzando la parità ed il punto precedente si ha che il massimo è assunto in $\sigma^2 = (a^2 - b^2)/(2\ln(a/b))$.

Soluzione esercizio 7.

1. $Y = g(X) = e^X$, la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ è derivabile con continuità e $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Possiamo invertire g ottenendo $g^{-1}(y) = \ln(y)$, $g^{-1}(y)' = \frac{1}{y}$. La densità di Y è quindi:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi * \sigma}} \frac{1}{y} \exp\{\frac{(\ln(y)-\mu)^2}{2\sigma^2}\} & y > 0. \end{cases}$$

2. Per calcolare $\mathbb{E}(Y^p)$ per ogni $p \geq 1$, notiamo che $\mathbb{E}(Y^p) = \mathbb{E}(e^{pX}) = m_X(p)$. D'altra parte $X = \sigma Z + \mu$, quindi per la proprietà di linearità del valore atteso, $m_X(p) = e^{\mu p} m_Z(\sigma p)$.
Per ogni $t \in \mathbb{R}$ vale:

$$m_Z(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{tz} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{z^2}{2})\, dz = e^{t^2/2} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(z-t)^2}{2})\, dz = e^{t^2/2}$$

Quindi sostituendo opportunamente, otteniamo $\mathbb{E}(Y^p) = e^{\mu p + \sigma^2 p^2/2}$.

3. Sostituendo nell'espressione appena trovata il valore $p = 1$, otteniamo che $\mathbb{E}(Y) = e^{\mu + \sigma^2/2}$. Inoltre $\mathbb{E}(Y^2) = e^{2\mu + 2\sigma^2}$, da cui otteniamo che $\mathrm{var}(Y) = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$.

Soluzione esercizio 8.

1. Sia $\mu := \mathbb{P}_X$ la legge di X, allora, dal teorema di Fubini e Tonelli (la parte di Tonelli) si ha che

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X|) &= \int_{\mathbb{R}} |x| \mathrm{d}\mu(x) = \int_{(-\infty,0)} \int_x^0 \mathrm{d}s \mathrm{d}\mu(x) + \int_{[0,+\infty)} \int_0^x \mathrm{d}s \mathrm{d}\mu(x) \\ &= \int_{(-\infty,0)} \int_{(-\infty,x]} \mathrm{d}\mu(x) \mathrm{d}s + \int_{[0,+\infty)} \int_{(x,+\infty)} \mathrm{d}\mu(x) \mathrm{d}s \\ &= \int_{(-\infty,0)} \mathbb{P}(X \leq x) \mathrm{d}s + \int_{[0,+\infty)} \mathbb{P}(X > x) \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Si osservi che, essendo $\int_{(-\infty,x]} \mathrm{d}s = \int_{(-\infty,x)} \mathrm{d}s$ allora evidentemente

$$\int_{(-\infty,0)} \int_x^0 \mathrm{d}s\mathrm{d}\mu(x) = \int_{(-\infty,0)} \mathbb{P}(X \leq x)\mathrm{d}s = \int_{(-\infty,0)} \mathbb{P}(X < x)\mathrm{d}s$$
$$\int_{[0,+\infty)} \int_0^x \mathrm{d}s\mathrm{d}\mu(x) = \int_{[0,+\infty)} \mathbb{P}(X > x)\mathrm{d}s = \int_{[0,+\infty)} \mathbb{P}(X \geq x)\mathrm{d}s.$$

2. Ancora dal teorema di Fubini e Tonelli (parte di Fubini), essendo valide le condizioni di integrabilità di X si ha, similmente,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x\mathrm{d}\mu \int_{(-\infty,0)} \int_x^0 \mathrm{d}s\mathrm{d}\mu(x) - \int_{[0,+\infty)} \int_0^x \mathrm{d}s\mathrm{d}\mu(x) \\ = \int_{(-\infty,0)} \int_{(-\infty,x]} \mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}s - \int_{[0,+\infty)} \int_{(x,+\infty)} \mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}s \\ = \int_{(-\infty,0)} \mathbb{P}(X \leq x)\mathrm{d}s - \int_{[0,+\infty)} \mathbb{P}(X > x)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

L'ultima affermazione è conseguenza del Teorema di convergenza monotona.

Soluzione esercizio 9.
In generale per uno spazio di misura (Ω, Σ, μ) vale

$$\int_\Omega \|X\|^p \mathrm{d}\mu = \int_{[0,+\infty)} \mu(\|X\|^p > s) = \int_{[0,+\infty)} \mu(\|X\|^p \geq s).$$

La dimostrazione è essenzialmente quella dell'esercizio precedente. La seconda uguaglianza è conseguenza del Teorema di Fubini-Tonelli applicato a $\mathbb{1}_{(\omega,s):\|X(\omega)\|^p=s}$ nello spazio $(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{F} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mathbb{P} \times m)$.

Soluzione esercizio 10.
Non è difficile vedere (provare), utilizzando l'esercizio precedente, che per una generica variabile aleatoria

$$\sum_{i=0}^{\infty} (r_{i+1} - r_i)\mathbb{P}(\|X\| \geq r_{i+1}) \leq \int \|X\|\mathrm{d}\mathbb{P} \leq \sum_{i=0}^{\infty} (r_{i+1} - r_i)\mathbb{P}(\|X\| \geq r_i).$$

Pertanto, essendo $\sum_{i=0}^{\infty} (r_{i+1} - r_i)\mathbb{P}(\|X\| \in [r_i, r_{i+1})) < +\infty$ si ha

$$\sum_{i=0}^{\infty} (r_{i+1}-r_i)\mathbb{P}(\|X\| \geq r_i) - \sum_{i=0}^{\infty} (r_{i+1}-r_i)\mathbb{P}(\|X\| \in [r_i, r_{i+1})) \leq \int \|X\|\mathrm{d}\mathbb{P} \leq \sum_{i=0}^{\infty} (r_{i+1}-r_i)\mathbb{P}(\|X\| \geq r_i).$$

da cui l'asserto.

Soluzione esercizio 11.
Se $A_n := \{X_n = Y_n\}$ allora $A_n \supseteq \{|X_n| \leq n\}$. Dalla proprietà di identica distribuzione e dagli esercizi precedenti

$$\sum_n \mathbb{P}(|X_n| > n) = \sum_n \mathbb{P}(|X_0|\, 0) < +\infty$$

pertanto $\sum_n \mathbb{P}(A_i^c) < +\infty$ e dal Lemma di Borel-Cantelli

$$\mathbb{P}(\liminf A_n) = 1.$$

Soluzione esercizio 12.
Ogni lancio è modellizzabile come una prova di Bernoulli di parametro

$$\frac{1}{3} = \mathbb{P}(\text{" esce il cinque"}) + \mathbb{P}(\text{" esce il sei"})$$

allora la successione di lanci è una successione di prove di Bernoulli indipendenti fra loro tutte di parametro $\frac{1}{3}$. Quindi Y ha legge geometrica di parametro $\frac{1}{3}$: $\mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots$. Utilizzando la formula appena enunciata nell'esercizio precedente:

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 3$$

Altrimenti possiamo procedere nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} &= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{3}\frac{d}{dx}\Big(\sum_{k=1}^{+\infty} x^k\Big)\Big|_{x=\frac{2}{3}} \\ &= \frac{1}{3}\frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{1-x} - 1\Big)\Big|_{x=\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{3}\frac{3^2}{1} = 3\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(Y^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{+\infty}(k^2-k)\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{+\infty}(k)\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} =$$

$$\frac{1}{3}\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{+\infty}(k-1)k\frac{2}{3}^{k-2} + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{+\infty}(k)\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{d^2}{dx^2}\Big(\sum_{k=1}^{+\infty} x^k\Big)\Big|_{x=\frac{2}{3}} + 3 = \frac{1}{3}\frac{2}{3}2*27+3 = 15$$

quindi $\mathrm{var}(X) = 15 - 9 = 6$.

In generale per una v.a. distribuita con legge geometrica di parametro p si ha che la media è $\frac{1}{p}$ e la varianza è $\frac{1-p}{p^2}$.

Un altro modo per calcolare la varianza è il seguente. Sia $Y \sim \mathrm{Geom}(p)$ (e si definisca $1 - p = q$), quindi:

- si calcola la funzione generatrice dei momenti:

$$m_Y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{tn}p(n) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{tn}pq^{n-1} = \frac{p}{q}\Big(\frac{1}{1-e^t q} - 1\Big) \text{ se } t < \ln\Big(\frac{1}{q}\Big),$$

- si deriva due volte la funzione generatrice $m_Y(t)$ e la si calcola in $t = 0$, si ha $m_Y''(0) = \mathbb{E}(Y^2) = \frac{2-p}{p^2}$,

- otteniamo infine $\mathrm{var}(Y) = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$.

Soluzione esercizio 13.

Si ricordi che se $X \sim \mathcal{U}(a,b)$ allora $\mathbb{E}(X) = (b+a)/2$ e $\mathrm{var}(X) = (b-a)^2/12$.

1. Ovviamente $Y_1 \sim \mathcal{U}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $\mathbb{E}(Y_1) = 0$, $\mathrm{var}(Y_1) = 1/12$
2. Si osservi che

$$\begin{aligned} F_{Y_2}(t) &= \mathbb{P}(Y_1 \leq t) = \mathbb{P}(|U - \frac{1}{2}| \leq t) \\ &= \mathbb{P}(U \leq \frac{1}{2} + t) - \mathbb{P}(U < \frac{1}{2} - t) \end{aligned}$$

   da cui facilmente $Y_2 \sim \mathcal{U}(0, \frac{1}{2})$, $\mathbb{E}(Y_2) = 1/4$, $\mathrm{var}(Y_2) = 1/48$
3. $f_{Y_3}(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} I_{(0,1/4)}(t)$, $\mathbb{E}(Y_3) = 1/12$, $\mathrm{var}(Y_3) = 1/180$
4. $f_{Y_4}(t) = \frac{1}{t^2} I_{(2/3,2)}(t)$, $\mathbb{E}(Y_4) = \ln(3)$, $\mathrm{var}(Y_3) = 4/3 - (\ln(3))^2$
5. $Y_5 \sim \exp(\lambda)$, $\mathbb{E}(Y_5) = \frac{1}{\lambda}$, $\mathrm{var}(Y_5) = \frac{1}{\lambda^2}$

Soluzione esercizio 14.

1. $$\mathbb{E}(X) = 1 * \frac{\theta}{2(1+\theta)} - 1 * \frac{\theta}{2(1+\theta)} + 0 = 0$$

   quindi $\mathrm{var}X = \mathbb{E}(X^2)$:

$$\mathbb{E}(X^2) = 1 * \frac{\theta}{2(1+\theta)} + 1 * \frac{\theta}{2(1+\theta)} + 0 = \frac{\theta}{(1+\theta)}$$

2. $Y = X^2$ può assumere solo valori $0, 1$,

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{se } X = 1 \text{ oppure } X = -1 \\ 0 & \text{se } X = 0 \end{cases}$$

   quindi Y è una variabile di Bernoulli di parametro $\frac{\theta}{\theta+1}$, con media $\frac{\theta}{\theta+1}$ e varianza $\frac{\theta}{(\theta+1)^2}$.

Soluzione esercizio 15.

Dalle proprietà fondamentali della teoria dell'integrazione rispetto ad una misura μ si ha che se una funzione misurabile f è k-integrabile ed $\alpha > 0$, allora

$$\mu(\{|f| \geq \alpha\}) \leq \frac{\int_{\{|f|\geq\alpha\}} |f|^k \mathrm{d}\mu}{\alpha^k} \leq \frac{\int_\Omega |f|^k \mathrm{d}\mu}{\alpha^k}$$

e vale l'uguaglianza nella prima disuguaglianza se e solo se $|f| \leq \alpha$ μ-q. o. , mentre vale l'uguaglianza nella seconda disuguaglianza se e solo se $|f| \geq \alpha$ μ-q. o. .

In totale
$$\mu(\{|f| \geq \alpha\}) = \frac{\int_\Omega |f|^k \mathrm{d}\mu}{\alpha^k}$$
se e solo se $\mu(\{|f| \neq \alpha\}) = 0$.

Nella fattispecie, è necessario e sufficiente che $|X - \mathbb{E}(X)| = \alpha$, per cui basta prendere una variabile di Bernoulli Y di parametro $1/2$ e scegliere $X := 2\alpha Y$.

Un'altro esempio è dato da una variabile uniformemente distribuita sulla circonferenza di raggio α.

In generale se la variabile X è a valori in $\mathbb{R}^n$, si tratta di una variabile con distribuzione concentrata su una sfera di raggio α e simmetrica rispetto al centro.

Soluzione esercizio 16.
Dalla monotonia di ϕ si ha la misurabilità. Si ha
$$\begin{aligned}\int_\Omega \phi(|X|)\mathrm{d}\mu &= \int_{|X|\geq\alpha} \phi(|X|)\mathrm{d}\mu + \int_{|X|<\alpha} \phi(|X|)\mathrm{d}\mu \\ &\geq \phi(\alpha)\mu(|X| \geq \alpha).\end{aligned}$$

Soluzione esercizio 17.

1. Si osservi che, per ogni $x \in (-\alpha, +\infty)$, dalla disuguaglianza di Chebichev si ha
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X - m \geq \alpha) = \mathbb{P}(X - m + x \geq \alpha + x) &\leq \mathbb{P}(|X - m + x| \geq \alpha + x) \\ &\leq \frac{\mathbb{E}((X - m + x)^2)}{(\alpha + x)^2} =\leq \frac{\sigma^2 + x^2}{(\alpha + x)^2} =: f(x)\end{aligned}$$
Sostituendo $x = \sigma^2/\alpha$ (che giace nell'intervallo considerato) si ha $f(\sigma^2/\alpha) = \sigma^2/(\sigma^2 + \alpha^2)$.

   Per comprendere per quale motivo si scelga tale valore si osservi che $f : (\alpha, +\infty) \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e derivabile con derivata
$$f'(x) = \frac{2x(\alpha + x)^2 - 2(\alpha + x)(\sigma^2 + x^2)}{(\alpha + x)^4} = 2\frac{x\alpha^2 + x(\alpha^2 - \sigma^2) - \alpha\sigma^2}{(\alpha + x)^4}.$$
I punti di annullamento della derivata sono $-\alpha$ e σ^2/α, lnico accettabile è il secondo, a sinistra del quale la derivata è negativa e a destra del quale è positiva, pertanto è un minimo.

2. Considerando la variabile $Y := -X$ (avente stessa varianza di X e media pari a $-m$) ed applicando quanto ottenuto in precedenza si ha

$$\mathbb{P}(X - m \leq -\alpha) = \mathbb{P}(Y - (-m) \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \alpha^2}.$$

3. Dalle due precedenti, se $\alpha > 0$,

$$\mathbb{P}(|X - m| \geq \alpha) = \mathbb{P}(X - m \geq \alpha) + \mathbb{P}(X - m \leq -\alpha) \leq \frac{2\sigma^2}{\sigma^2 + \alpha^2}.$$

4. Consideriamo, senza perdita di generalità $\sigma^2 = 1$. Se $\alpha \geq 1$ allora la variabile X definita da

$$\mathbb{P}(X = x) := \begin{cases} \frac{1}{\alpha^2+1} & x = \alpha + \frac{1}{\alpha} \\ \frac{\alpha^2}{\alpha^2+1} & x = 0 \end{cases}$$

garantisce l'uguaglianza nel primo punto. Per quanto riguarda il secondo punto basta sfruttare la simmetria. Per il terzo punto si consideri la variabile

$$\mathbb{P}(X = x) := \begin{cases} \frac{1}{2} & x = 1 \\ \frac{1}{2} & x = -1 \end{cases}$$

che garantisce l'uguaglianza con $\alpha = 1$.

Soluzione esercizio 18.

1. Sia T l'evento "il dado scelto è truccato" allora:

$$\mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(X = 3|T)\mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(X = 3|T^c)\mathbb{P}(T^c) = \frac{1}{10} * \frac{1}{2} + \frac{1}{6} * \frac{1}{2} = \frac{2}{15}$$

e

$$\mathbb{E}(X) = 1\mathbb{P}(X = 1) + (2+3+4+5+6)\mathbb{P}(X = 3) = 1(1 - 5\frac{2}{15}) + 20 * \frac{2}{15} = 3$$

2. verifichiamo se vale la relazione $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap B|T)\mathbb{P}(T) + \mathbb{P}(A \cap B|T^c)\mathbb{P}(T^c) = \left(\frac{1}{10}\right)^2 \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \frac{1}{2}$$

è evidentemente differente da $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \left(\frac{2}{15}\right)^2$, i due eventi non perciò sono indipendenti.

Soluzione esercizio 19.

Sia X la v.a. che indica il voto riportato dagli studenti, $\mu_X = 24$, $\sigma_X = 4$. $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) = N(24, 16)$ pongo $Z = \dfrac{X - \mu_X}{\sigma_X} = \dfrac{X - 24}{4} \sim N(0, 1)$

1. $\mathbb{P}(X > 27) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 27) = 1 - \mathbb{P}(\frac{X-24}{4} \leq \frac{3}{4}) = 1 - \mathbb{P}(Z \leq 0.75) = 1 - 0.77337 = 0.22663$.
2. $\mathbb{P}(X < 22) = \mathbb{P}(Z < \frac{22-24}{4}) = 1 - \mathbb{P}(Z < 0.5) = 1 - 0.69146 = 0.30854$
3. cerchiamo x tale che $\mathbb{P}(X > x) = 0,7$ cioè $\mathbb{P}(Z > \frac{x-24}{4}) = 0.7$ ovvero, dal momento che $\mathbb{P}(Z > \frac{x-24}{4}) = \mathbb{P}(Z < -\frac{x-24}{4})$, $\frac{-(x-24)}{4} = 0.525$ quindi $x = 21.9$.
4. $0.9 = \mathbb{P}(X < x) = \mathbb{P}(Z < \frac{x-24}{4})$, quindi $\frac{x-24}{4} = 1.285$, da cui $x = 29.14$.

Soluzione esercizio 20.

1. Sia $E = \{|X| < 0.6\}$ e $H = \{$ l' ambiente è umido$\}$. Allora per il teorema delle probabilità totali:
$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E|H)\mathbb{P}(H) + \mathbb{P}(E|H^c)\mathbb{P}(H^c)$$
Inoltre
$$\mathbb{P}(E|H) = \mathbb{P}(|X| < 0.6|H) = \mathbb{P}(|Z| < \frac{0.6}{0.5}) = 2(\Phi(1.2)) - 1 \simeq 0.7699$$
con $Z = \frac{X}{0.5} \sim \mathcal{N}(0,1)$ sotto l'ipotesi che l'ambiente sia umido.
$$\mathbb{P}(E|H^c) = \mathbb{P}(|X| < 0.6|H^c) = \mathbb{P}(|Z| < \frac{0.6}{0.25}) = 2(\Phi(2.4)) - 1 \simeq 0.9836$$
con $Z = \frac{X}{0.25} \sim \mathcal{N}(0,1)$. Quindi $\mathbb{P}(E) = 0.7699*0.8 + 0.9836*0.2 = 0.8126$.
2. Per il teorema di Bayes:
$$\mathbb{P}(H|E) = \frac{\mathbb{P}(E|H)\mathbb{P}(H)}{\mathbb{P}(E)} \simeq \frac{0.7699 * 0.8}{0.8126} \simeq 0.7580$$

Soluzione esercizio 21.

1. Si osservi che $\mathbb{P}(M < 0) = 0$, $\mathbb{P}(M \leq 0) = \mathbb{P}(M = 0) = \mathbb{P}(N \leq 0) = \frac{1}{2}$,
2. Evidentemente $M \geq 0$ quasi certamente e
$$\begin{aligned} F_M(t) &= \mathbb{P}(M \leq t) = \mathbb{P}(M \leq t|X \geq 0)\mathbb{P}(X \geq 0) + \mathbb{P}(M \leq t|X < 0)\mathbb{P}(X < 0) \\ &= \mathbb{P}(X \leq t|X \geq 0)\mathbb{P}(X \geq 0) + \mathbb{P}(0 \leq t|X < 0)\mathbb{P}(X < 0) \\ &= \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2} & t = 0 \\ \phi(t/\sigma). \end{cases} \end{aligned}$$
In definitiva $F_M(t) = \phi(\frac{t}{\sigma})I_{[0,+\infty)}$.

3.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_0^{+\infty}(1-F_X(t))\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t\frac{\exp(-t^2/\sigma^2)}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}t \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} s\exp(-s^2)\mathrm{d}s = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{\exp(-s^2)}{2}\right)\Big|_0^{+\infty} = \frac{\sigma}{2\sqrt{2\pi}}.\end{aligned}$$

Soluzione esercizio 22.

La prima parte è banale. Per gli esempi si consideri $\phi = \phi_1 = \mathbb{R}$ con le σ-algebre di Borel e $f := x^2$ sia nel primo che nel secondo caso. Banalmente

$$\begin{aligned} f^{-1}((\Sigma_1)_f) &= \{ \text{ insiemi Borelliani simmetrici rispetto a 0 } \} \\ (f^{-1}(\Sigma_2))_f &= \{A\cup B : A\mathcal{B}([0,+\infty)), B\subseteq(-\infty,0)\}. \end{aligned}$$

Dalla scomposizione $f = f_1^+ - f_1^- + i(f_2^+ - f_2^-)$ si ha che possiamo limitarci a considerare il caso $f \geq 0$ e $A = Y$.

Se f è semplice allora $f = \sum_i a_i \mathbb{1}_{M_i}$ con $M_i \in \Sigma_1$ per ogni i ed $f\circ X = \sum_i a_i \mathbb{1}_{M_i}\circ X = \sum_i a_i \mathbb{1}_{X^{-1}(M_i)}$ da cui, per definizione,

$$\int_Y f\circ X\mathrm{d}\mu = \sum_i a_i\mu(X^{-1}(M_i)) = \sum_i a_i\mu_X(M_i) = \int_\Phi f\mathrm{d}\mu_X$$

L'asserto si ottiene per estensione utilizzando il Teorema di Convergenza Monotona.

Soluzione esercizio 23.

Si osservi che

$$\begin{aligned}\int_\Omega \phi\circ f\mathrm{d}\mu &= \int_{\mathbb{R}}\phi\mathrm{d}\mu_f \\ &= \int_A \phi\mathrm{d}\mu_f + \int_{A^c}\phi\mathrm{d}\mu_f \\ &\geq \int_A\phi\mathrm{d}\mu_f \\ &\geq a\cdot\mu_f(A) \equiv a\cdot\mu(f\in A).\end{aligned}$$

Si osservi che la disuguaglianza tra la riga 2 e la riga 3 è un'uguaglianza se e solo se $\int_{A^c}\phi\mathrm{d}\mu_f = 0$ cioè se e solo se $0 = \mu_f(A^c\cap\phi>0) = \mu(f^{-1}(A)\cap\{\phi\circ f > 0\}) = 0$; inoltre la disuguaglianza tra la riga 3 e la riga 4 è un'uguaglianza se e solo se $0 = \mu_f(A\cap\{\phi > a\}) = \mu(f\in A, \phi\circ f > 0)$.

Soluzione esercizio 24.
Se $y \notin \operatorname{essdom}(\mu)$ allora esiste $A\in\tau$ tale che $y\in A$ e $\mu(A) = 0$ da cui, per

definizione, ogni $z \in A$ soddisfa $z \notin \text{essdom}(\mu)$ e quindi $A \subseteq \text{essdom}(\mu)^c$; quindi $\text{essdom}(\mu)^c \in \tau$.

Ora $y \notin \text{essdom}(f)$ se e solo se esiste $A \in \tau$ tale che $\mu(A) = 0$ e $y \in A$ cioè se e solo se

$$y \in \bigcap_{N \in \tau : \mu(N)=0} N$$

e quindi se e solo se

$$y \notin \left(\bigcap_{M \in \tau : \mu(N)=0} N \right)^c \subseteq \text{essdom}(f).$$

Sia

$$M := \bigcap_{N \in \mathcal{A} : \mu(A)=0} N$$

allora $\mu(M) = 0$ e se $K \in \tau$ soddisfa $\mu(K) = 0$ allora

$$K = \bigcap_{N \in \mathcal{A} : N \subseteq K} N \subseteq M.$$

Pertanto M è il più grande insieme di misura nulla e quindi $M = \text{essdom}(\mu)^c$.

Soluzione esercizio 25.

Ovviamente $\mathbb{P} - \text{essRg}(f) = \text{essdom}(\mathbb{P}_f)$ pertanto, dipendendo solo dalla legge, tutte le variabili hanno lo stesso Range essenziale.

Se $U \in \tau$ tale che $U \cap \text{essRg}(f) \neq \emptyset$ allora $\mathbb{P}_{X_i}(U) = \mathbb{P}_f(U) > 0$ pertanto dall'indipendenza, a norma del Lemma di Borel-Cantelli,

$$\mathbb{P}(\limsup_{i \to +\infty} \{X_i \in U\}) = 1.$$

Questo implica la densità quasi certa di $\{X_i : i \in \mathbb{N}\}$ e che

$$\begin{aligned} y \in \text{essRg}(f) &\Longrightarrow \forall U \in \mathcal{U}_y : \mathbb{P}(\limsup_{i \to +\infty} \{X_i \in U\}) \\ &\Longrightarrow \forall U \in \mathcal{U}_y : \mathbb{P}(\exists i \in \mathbb{N} : X_i \in U) = 1. \end{aligned}$$

Se $y \notin \text{essRg}(f)$ allora esiste $U \in \tau$: $y \in U$ e $\mathbb{P}_f(U) \equiv \mathbb{P}_{X_i}(U) = 0$ che implica $\mathbb{P}(\exists i \in \mathbb{N} : X_i \in U) = 0$.

Infine sotto le ipotesi dell'esercizio 24 si ha facilmente che $\mathbb{P}(\exists i \in \mathbb{N} : X_i \in \text{essRg}(f)^c) = 0$; quindi $\{X_i : i \in \mathbb{N}\}$ è $\mathbb{P}$-q.c. un sottoinsieme (denso) di $\text{essRg}(f)$.