# 9 Esercitazione 9: / /



## 9.1 Vettori aleatori continui

**Esercizio 1** *Mostrare con un esempio che se la legge due variabili aleatorie $X$ e $Y$ ammettono densità non è necessario che la legge della variabile congiunta $(X, Y)$ ammetta densità.*

**Esercizio 2** *Il vettore aleatorio $(X, Y)$ ha densità uniforme sulla regione $R$ ottenuta congiungendo i punti $(0, 2), (2, 0), (4, 2)(2, 4)$:*

1. *Calcolate la densità marginale di $X$;*
2. *Quanto vale $\mathbb{E}(X)$?*
3. *Quanto vale $\mathbb{P}(X < Y)$?*
4. *Quanto vale $\mathbb{P}(X \leq 2, Y \leq 1)$?*
5. *$X$ ed $Y$ sono indipendenti?*

**Esercizio 3** *(MPSPS 01/02/1999) Sia $(X, Y)$ un vettore aleatorio con densità congiunta:*

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} x(y - x)e^{-y} & 0 < x < y \\ 0 & \textit{altrove} \end{cases}$$

1. *Calcolare le densità marginali di $X$ e di $Y$.*
2. *$X$ ed $Y$ sono indipendenti? Giustificare rigorosamente la risposta.*
3. *Calcolare $\mathbb{P}(X \leq 2, Y \leq 3)$.*
4. *Trovare una diversa densità congiunta avente le stesse marginali.*
5. *Si calcoli $\rho(X, Y) := \mathrm{cov}(X, Y)/\sqrt{\mathrm{var}(X)\mathrm{var}(Y)}$.*

**Esercizio 4** *$(X, Y)$ ha legge congiunta:*

$$f(x, y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda y} & 0 \leq x \leq y \\ 0 & \textit{altrove} \end{cases}$$

1. *Si trovino le densità marginali di $X$ e $Y$.*
2. *Si calcoli la funzione di ripartizione congiunta.*

3. *Si calcolino le funzioni di ripartizione marginali.*

4. *Sia ora* $\lambda = 1$*, le due variabili aleatorie sono indipendenti ?*

5. *Si calcoli la densità congiunta del vettore* $(Z, W) := (X + Y, X - Y)$.

**Esercizio 5** *Se le variabili aleatorie* $X$,$Y$ *hanno densità congiunta* $f$ *della forma:*

$$f_{(X,Y)}(x, y) = e^{-2y} I_{(-1,1)}(x) I_{(0,+\infty)}(y)$$

*sono indipendenti?*

**Esercizio 6** *Sia* $(X, Y)$ *un vettore aleatorio con funzione di ripartizione:*

$$F_{(X,Y)}(x, y) = (1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-x-y}) I_{(0,+\infty)}(x) I_{(0,+\infty)}(y).$$

$X$ *ed* $Y$ *sono indipendenti?*

# 10 Funzioni di variabili aleatorie discrete, covarianza e coefficiente di correlazione.

**Esercizio 7** *Sia* $(X, Y)$ *un vettore aleatorio discreto la cui densità congiunta ha la seguente forma:*

| | *Y=0* | *Y=1* | *Y=2* |
|---|---|---|---|
| *X=0* | *a* | *0* | *c* |
| *X=1* | *0* | *b* | *0* |

*dove* $a \neq 0, b \neq 0$ *e* $c \neq 0$.

1. *Quali ulteriori condizioni devono soddisfare i parametri* $a, b$ *e* $c$ *affinché quella data sia effettivamente una densità congiunta? Calcolare le densità marginali e i valori attesi di* $X$ *e di* $Y$.

2. *Posto* $a = c = 1/3$ *e* $U = \frac{1}{2}(Y + X)$ *e* $V = \frac{1}{2}(Y - X)$*, calcolare la densità congiunta di* $(U, V)$ *e le densità marginali di* $U$ *e* $V$.

3. *Si calcoli* $\mathrm{cov}(U, V)$.

4. *Si calcoli* $\mathbb{P}(U < V)$ *e* $\mathbb{P}(|U - V| = 1)$.

5. $U$ *e* $V$ *sono indipendenti?*

**Esercizio 8** *Si lanciano in successione tre monete equilibrate. Sia* $X$ *il numero di esiti "testa" per le prime due monete e* $Y$ *il numero di esiti "croce" per le ultime due.*

1. *Si determini la densità congiunta del vettore* $(X, Y)$.

2. *Si determinino* $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$, $Var(X)$, $Var(Y)$, $\rho(X,Y)$.

3. $X$ *e* $Y$ *sono indipendenti?*

4. *Calcolare* $\mathbb{P}(X \geq Y)$.

**Esercizio 9** *Su* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *sia assegnata una successione* $N, X_1, X_2, \ldots$ *di variabili aleatorie indipendenti tali che* $N$ *abbia legge di Poisson di parametro* $\lambda$ *e, ciascuna delle variabili* $X_i$ *abbia legge di Bernoulli di parametro* $p$. *Sia* $S_0 := 0$ *ed* $S_n := S_{n-1} + X_n$ *per ogni* $n \geq 1$ *e si denoti con* $S_N$ *la variabile definita da* $S_n(\omega) := S_{N(\omega)}(\omega)$.

1. *Qual è la legge di* $S_N$*?*

2. *Qual è la legge di* $N - S_N$*?*

3. *Si può affermare che* $N$ *ed* $N - S_N$ *sono indipendenti?*

4. *Fissati* $k, i \in \mathbb{N}$ *si calcoli la probabilità condizionata* $\mathbb{P}(N = k | S_N = i)$.

**Esercizio 10** *Si consideri il vettore aleatorio* $(X, Y)$ *dotato della seguente densità congiunta:*

| | *Y=-1* | *Y=0* | *Y=1* |
|---|---|---|---|
| *X=-15* | *0* | *2/36* | *0* |
| *X=-1* | *4/36* | *2/36* | *0* |
| *X=0* | *1/36* | *26/36* | *1/36* |

1. *Scrivere la legge di* $XY$

2. *Si calcoli la covarianza delle variabili aleatorie* $X$ *ed* $Y$*: sono correlate?*

3. *Le variabili aleatorie* $X$ *ed* $Y$ *sono indipendenti?*

4. *Si calcoli* $\mathbb{P}(X - |Y| = -1)$. *Si scriva la legge congiunta* $(X, |Y|)$.

**Esercizio 11** *Un'urna contiene* $b + r$ *biglie di cui* $b$ *bianche e* $r$ *rosse. Se ne pescano* $n$ *"a caso" senza rimpiazzo. Sia* $X$ *il numero di biglie bianche pescate. Calcolare la media di* $X$. *Siano* $X_i$ *la v.a. tali che:*

$$X_i = \begin{cases} 1 & \textit{se la } i\textit{-esima biglia estratta è bianca} \\ 0 & \textit{se la } i\textit{-esima biglia estratta è rossa.} \end{cases}$$

*Calcolare la matrice di covarianza di* $(X_1, \ldots, X_n)$.

**Esercizio 12** *Un'urna contiene* $b + r$ *biglie di cui* $b$ *bianche e* $r$ *rosse. Se ne pescano* $n$ *"a caso" senza rimpiazzo. Sia* $X$ *il numero di biglie bianche pescate. Calcolare media e varianza di* $X$.

## 11 Funzioni di variabili aleatorie

**Esercizio 13** *Sia $(X, Y)$ un vettore aleatorio continuo con densità data da*

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)} & \text{se } x, y > 0 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

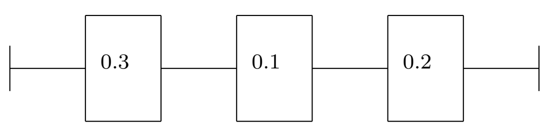
1. *Si determini la densità di $X + Y$.*
2. *Calcolare le densità marginali di $X$ e di $Y$. $X$ e $Y$ sono variabili aleatorie indipendenti?*
3. *Calcolare la media di $X + Y$.*
4. *Calcolare la media di $\frac{1}{X+Y}$.*

**Esercizio 14** *Siano $X_1, \ldots, X_n$, $n$ variabili aleatorie indipendenti con la stessa funzione di ripartizione $F$. Siano $Z = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ e $W = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$.*

1. *Qual è la funzione di ripartizione di $Z$?*
2. *Qual è la funzione di ripartizione di $W$?*
3. *Se $X_1$ è una variabile assolutamente continua con densità $f$, qual è la densità di $Z$?*
4. *Se $X_1$ è una variabile assolutamente continua con densità $f$, qual è la densità di $W$?*

**Esercizio 15** *Verificare che se $X$ ed $Y$ sono due v.a. indipendenti di parametri $\lambda_1$ e $\lambda_2$ allora $\min(X, Y)$ è un' esponenziale di parametro $\lambda_1 + \lambda_2$.*

**Esercizio 16** *Un componente elettronico è formato da tre elementi indipendenti in serie, ciascuno dei quali ha un tempo di vita esponenziale di parametri $\lambda = 0.3$, $\mu = 0.1$, $\gamma = 0.2$ rispettivamente.*




*a) Indichiamo con $T$ la v.a. "tempo di vita" del componente.Qual è la legge di $T$?*

*b) Per aumentare l' affidabilità e ridurre gli interventi di sostituzione, viene proposto di aggiungere un componente identico in parallelo. Qual è la densità del tempo di vita del nuovo complesso?*

## SOLUZIONI

**Soluzione esercizio 1.**
Ricordiamo che la legge di una variabile $X$ è la misura di probabilità sullo spazio di arrivo $\mathbb{P}_X(\cdot) := \mathbb{P}(X^{-1}(\cdot))$ (nel caso di spazi $\mathbb{R}^n$ si utilizza la $\sigma$-algebra di Borel generata dai rettangoli aperti).

Diamo tre esempi.

1. Si considerino il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$,

$$A_0 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

e sia $(X,Y)$ definita dalla legge

$$\mathbb{P}_{(X,Y)}(A) := m_{\mathbb{R}}(\{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : (x,y) \in A \cap A_0\}), \qquad \forall A \text{ Borelliano di } \mathbb{R}^2,$$

dove $m_{\mathbb{R}}$ è la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$. Allora si vede immediatamente che $\mathbb{P}_X(A) = m_{\mathbb{R}}(A) = \mathbb{P}_Y(A)$ e pertanto le leggi di $X$ ed $Y$ ammettono densità $\rho_X(t) = \rho_Y(t) = 1_{[0,1]}(t)$. Tuttavia $\mathbb{P}_{(x,y)}(A_0) = 1$ mentre $m_{\mathbb{R}^2}(A_0) = 0$ quindi la legge di $(X,Y)$ non ammette densità.

2. Si consideri la seguente funzione di ripartizione congiunta

$$F(t,s) := \begin{cases} 0 & (t,s) \notin (0,+\infty)^2 \\ 0 & (t,s) \in (0,1)^2 \\ 1 & (t,s) \in [1,+\infty)^2 \\ t & (t,s) \in (0,1) \times [1,+\infty) \\ s & (t,s) \in [1,+\infty) \times (0,1). \end{cases}$$

Allora evidentemente le densità marginali sono

$$F_1(t) = \lim_{s \to +\infty} F(t,s) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ t & t \in (0,1) \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$$

$$F_2(t) = \lim_{t \to +\infty} F(t,s) = \begin{cases} 0 & s \leq 0 \\ s & s \in (0,1) \\ 1 & s \geq 1 \end{cases}$$

da cui $\rho_1(w) = \rho_2(w) = \mathbb{1}_{(0,1)}(w)$.

3. Sia $X$ una qualsiasi variabile aleatoria (a valori in $(Z, \mathcal{F}, \mu)$ tale che $\mu(\{z\}) = 0$ per ogni $z \in Z$), allora il vettore $(X,X)$ non ammette densità essendo $\mu(\text{supp}((X,X))) \equiv \mu(\{(z,z) : z \in Z\}) = 0$.

**Soluzione esercizio 2.**

1. Essendo $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{8}\mathbf{1}_R(x,y)$, allora

$$\begin{aligned} f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y &= \begin{cases} \frac{[(2+x)-(2-x)]}{8} & x \in [0,2] \\ \frac{[(6-x)-(x-2)]}{8} & x \in [2,4] \end{cases} \\ &= \frac{x}{4}\mathbf{1}_{[0,2]}(x) + \left(1 - \frac{x}{4}\right)\mathbf{1}_{[2,4]}(x) \\ &= (\frac{1}{2} - |\frac{x-2}{4}|)I_{[0,4]}(x) \end{aligned}$$

2. $$\mathbb{E}(X) = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{4}\mathrm{d}x + \int_2^4 x \cdot \left(1 - \frac{x}{4}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{12}\Big|_0^2 + (\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12})\Big|_2^4 = 2,$$

   come si poteva intuire dalla simmetria della regione $R$ rispetto alla retta di equazione $x = 2$.

3. Le due regioni individuate da $\{(x,y) : x < y\} \cap R$ e $\{(x,y) : x \geq y\} \cap R$ hanno la stessa area ed inoltre esauriscono l'insieme dei valori ammissibili per $(X,Y)$, allora per l'ipotesi di uniforme densità di $(X,Y)$, abbiamo: $\mathbb{P}(X < Y) = 0.5$.

4. Poiché $\{(x,y) : x \leq 2, y \leq 1\} \cap R$ è un triangolo rettangolo di altezza 1 base (2-1)=1, allora per l'ipotesi di uniforme densità di $(X,Y)$ su $R$, abbiamo: $\mathbb{P}(X \leq 2, Y \leq 1) = (1/2)/8 = 1/16 = 0.0625$.

5. No: infatti $\mathbb{P}(X \leq 1/2, Y \leq 1/2) = 0$ mentre $\mathbb{P}(X \leq 1/2) = 1/32$ e $\mathbb{P}(Y \leq 1/2) = 1/32$.

   A tale conclusione si può arrivare anche ricordando che, per $n$ variabili $X_1, \ldots, X_n$, l'indipendenza equivale a $\mathbb{P}_{(X_1,\ldots,X_n)} = \mathbb{P}_{X_1} \cdot \cdots \cdot \mathbb{P}_{X_n}$ che, se le leggi ammettono densità, equivale a $\rho_{(X_1,\ldots,X_n)}(t_1,\ldots,t_n) = \rho_{X_1}(t_1) \cdot \cdots \cdot \rho_{X_n}(t_n)$ (quasi ovunque rispetto alla misura di Lebesgue prodotto su $\mathbb{R}^n$; una condizione sufficiente è che esista una aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che $\rho_{(X_1,\ldots,X_n)}(z) \neq \prod_{i=1}^n \rho_{X_i}(z)$, $\forall z \in \Omega$).

**Soluzione esercizio 3.**

1. Indichiamo con $f_X$ ed $f_Y$ le densità marginali di $X$ ed $Y$ rispettivamente.

Allora:

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= (\int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\mathrm{d}y) I_{(0,+\infty)}(x) \\
&= x(\int_x^{+\infty} (y-x)e^{-y}\mathrm{d}y) I_{(0,+\infty)}(x) \\
&= xe^{-x}(\int_0^{+\infty} ze^{-z}\mathrm{d}z) I_{(0,+\infty)}(x) \\
&= xe^{-x} I_{(0,+\infty)}(x)[-ze^{-z}]|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-z}\mathrm{d}z \\
&= xe^{-x} I_{(0,+\infty)}(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= (\int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\mathrm{d}x) I_{(0,+\infty)}(y) \\
&= e^{-y}(\int_0^y (y-x)x\mathrm{d}x) I_{(0,+\infty)}(y) = e^{-y}y^3\frac{1}{6} I_{(0,+\infty)}(y)
\end{aligned}
$$

2. $X$ ed $Y$ non sono indipendenti perchè la loro densità congiunta non può essere scritta come prodotto delle marginali. [Il prodotto delle marginali è diverso da 0 su tutto il primo quadrante mentre la congiunta solo in uno dei due angoli del primo quadrante individuati dalla retta $x = y$. ]

3. $\mathbb{P}(X \leq 2, Y \leq 3) = \int_0^2 x(\int_x^3 (y-x)e^{-y}\mathrm{d}y)\mathrm{d}x = 1 - 3e^{-2} - e^{-3}\frac{16}{3}$

4. Si può scegliere $\tilde{f}(x,y) = xe^{-x} I_{(0,+\infty)}(x) e^{-y} y^3 \frac{1}{6} I_{(0,+\infty)}(y)$.

5. Si osservi che
$$\int_0^{+\infty} t^n \exp(-t)\mathrm{d}t = n!$$
(lo si provi per induzione su $n$).

Per calcolare $\rho(X,Y) := \mathrm{cov}(X,Y)/\sqrt{\mathrm{var}(X)\mathrm{var}(Y)}$ si procede come segue

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_0^{+} \infty t^2 e^{-t} \mathrm{d}t = 2 \\
\mathbb{E}(Y) &= \int_0^{+} \infty \frac{s^4}{6} e^{-s} \mathrm{d}s = 4 \\
\mathbb{E}(X^2) &= \int_0^{+} \infty t^3 e^{-t} \mathrm{d}t = 6 \\
\mathbb{E}(Y^2) &= \int_0^{+} \infty \frac{s^5}{6} e^{-s} \mathrm{d}s = 20 \\
\mathbb{E}(XY) &= \int_0^{+} \infty \left( \int_t^{+} \infty t^2 s(s-t) e^{-s} \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+} \infty t^2 e^{-t} \left( \int_t^{+} \infty s(s-t) e^{-(s-t)} \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+} \infty t^2 e^{-t} \left( \int_0^{+} \infty (w+t) w e^{-w} \mathrm{d}w \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+} \infty t^2 e^{-t} (2+t) \mathrm{d}t = 4 + 6 = 10.
\end{aligned}
$$

Pertanto

$$\rho(X,Y) = \frac{10-8}{\sqrt{(6-4)(20-16)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

**Soluzione esercizio 4.**

1. Distinguiamo due casi:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_x^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda y} \mathrm{d}y = \lambda e^{-\lambda x}, \quad \text{se } x > 0$$

$$f_X(x) = 0, \quad \text{se } x \le 0$$

analogamente

$$f_Y(y) = \lambda^2 y e^{-\lambda y} I_{(0,+\infty)}$$

Quindi $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, mentre $Y \sim \Gamma(2,\lambda)$ (Si ricordi che $\rho_{\Gamma(\alpha,\lambda)}(s) := \lambda^\alpha s^{\alpha-1} \exp(-\lambda s)$).

2.

$$F(t_1,t_2) = \begin{cases} 0 & \text{se } t_1 \le 0, t_2 \le 0 \\ -\lambda t_1 e^{-\lambda t_2} + 1 - e^{-\lambda t_1} & \text{se } 0 < t_1 \le t_2 \\ 1 - e^{-\lambda t_2} - \lambda t_2 e^{-\lambda t_2} & \text{se } t_1 > t_2 > 0 \end{cases}$$

3. Se $t_2 > 0$

$$\lim_{t_1 \to +\infty} F_{(X,Y)}(t_1, t_2) = F_Y(t_2) = \lim_{t_1 \to +\infty} (1 - e^{-\lambda t_2} - \lambda t_2 e^{-\lambda t_2})$$
$$= 1 - e^{-\lambda t_2} - \lambda t_2 e^{-\lambda t_2}$$

altrimenti $F_X(t_2) = 0$.

Se $t_1 > 0$

$$\lim_{t_2 \to +\infty} F_{(X,Y)}(t_1, t_2) = F_X(t_2) = \lim_{t_2 \to +\infty} -\lambda t_1 e^{-\lambda t_2} + 1 - e^{-\lambda t_1} = 1 - e^{-\lambda t_1}$$

altrimenti $F_Y(t_1) = 0$

4. No: infatti $\mathbb{P}(X \leq 1, Y \leq 1) = 1 - 2e^{-1} \neq (1 - 2e^{-1})(1 - e^{-1}) = \mathbb{P}(X \leq 1)\mathbb{P}(Y \leq 1)$.

5. Essendo
$$\begin{pmatrix} Z \\ W \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \qquad \text{dove } A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
ed essendo $v \mapsto Av$ un diffeomorfismo di $\mathbb{R}^2$ su se stesso (è necessario e sufficiente che $A$ sia invertibile cioè che $\det(A) \neq 0$), allora per le densità vale
$$\rho_{(Z,W)}(t, s) = \rho_{(X,Y)}((t, s)(A^{-1})^t) \frac{1}{|\det(A)|}.$$
Essendo
$$\det(A) = -\frac{1}{2}$$
$$A^{-1} := \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$
si ha (ricordando che la composizione di funzioni è associativa)
$$\rho_{(Z,W)}(t, s) = \frac{1}{2} f(s/2 + t/2, t/2 - s/2) = \frac{1}{2}\lambda^2 \exp(-\lambda(t - s)/2)\mathbb{1}_{(0,(t-s)/2)}((t + s)/2)$$
$$\frac{1}{2}\lambda^2 \exp(-\lambda(t - s)/2)\mathbb{1}_{(-t,0)}(s)$$
si osservi infatti che
$$0 \leq \frac{t + s}{2} \leq \frac{t - s}{2} \iff -t \leq s \leq 0.$$

**Soluzione esercizio 5.**

[Risultato: si, si possono separare le variabili.]

**Soluzione esercizio 6.**

[Risultato: si, si possono separare le variabili,
$F(x,y) = \left[(1-e^{-x})I_{(0,+\infty)}(x)\right]\left[(1-e^{-y})I_{(0,+\infty)}(y)\right]$.]

**Soluzione esercizio 7.**

1. Le condizioni sono $a,b,c \geq 0$, $a+b+c=1$. Densità marginale di $X$:

$$\begin{cases} p_X(0) = \mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}((X,Y)=(0,0)) + \mathbb{P}((X,Y)=(0,1)) \\ \qquad + \mathbb{P}((X,Y)=(0,2)) = a+0+c \\ p_X(1) = \mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}((X,Y)=(1,0)) + \mathbb{P}((X,Y)=(1,1)) \\ \qquad + \mathbb{P}((X,Y)=(1,2)) = 0+b+0 \\ \qquad 0 \quad \text{altrove} \end{cases}$$

   Densità marginale di $Y$:

$$\begin{cases} p_Y(0) = \mathbb{P}((X,Y)=(0,0)) + \mathbb{P}((X,Y)=(1,0)) = a+0 \\ p_Y(1) = \mathbb{P}((X,Y)=(0,1)) + \mathbb{P}((X,Y)=(1,1)) = 0+b \\ p_Y(2) = \mathbb{P}((X,Y)=(0,2)) + \mathbb{P}((X,Y)=(1,2)) = c+0 \\ 0 \quad \text{altrove} \end{cases}$$

   Quindi

$$\mathbb{E}(X) = 0*(a+c) + 1*b = b$$

$$\mathbb{E}(Y) = 0*a + 1*b + 2*c = b+2c.$$

2. Poiché

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

   allora,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e } A^{-1}\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U-V \\ U+V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

   Quindi:

$$p_{(U,V)}(u,v) = p_{(X,Y)}(A^{-1}((u,v)) = p_{(X,Y)}(u-v,u+v) = ...$$

   La densità congiunta e le densità marginali sono le seguenti:

| | V=0 | V=1 | U |
|---|---|---|---|
| U=0 | 1/3 | 0 | 1/3 |
| U=1 | 1/3 | 1/3 | 2/3 |
| V | 2/3 | 1/3 | |

3. $\text{Cov}(U,V) = \frac{1}{9}$.
4. $\mathbb{P}(|U-V|=1) = \frac{1}{3}$.
5. $\mathbb{P}(U<V) = 0$.
6. No perché sono correlati.

**Soluzione esercizio 8.**
L'insieme dei possibili risultati dei lanci delle tre monete è

$$\Omega = \{TTT, TTC, TCT, TCC, CTT, CTC, CCT, CCC\}$$

Essendo le monete equilibrate ogni terna in $\Omega$ ha probabilità uniforme =1/8.

1. La distribuzione del vettorio aleatorio $(X,Y)$ può essere descritta utilizzando una tabella a doppia entrata:

| $X$ $Y$ | 0 | 1 | 2 | $\mathbb{P}(X=x)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $\mathbb{P}((X,Y)=(0,0))$= 0 | 1/8 | 1/8 | 2/8 |
| 1 | 1/8 | 2/8 | 1/8 | 4/8 |
| 2 | 1/8 | 1/8 | 0 | 2/8 |
| $\mathbb{P}(Y=y)$ | 2/8 | 4/8 | 2/8 | 1 |

2. Poiché
$$\mathbb{P}(XY=i) = \begin{cases} 1/2 & i=0 \\ 1/4 & i=1 \\ 1/4 & i=2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$
si ha $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \frac{4}{8}\cdot 1 + \frac{2}{8}\cdot 2 = 1$;
$\text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) = \frac{4}{8}\cdot 1 + \frac{2}{8}\cdot 4 - 1 = \frac{1}{2}$;
$\text{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 1\cdot 1\cdot \frac{2}{8} + 1\cdot 2\cdot \frac{1}{8} + 2\cdot 1\cdot \frac{1}{8} - 1 = -1/4 \Rightarrow \rho(X,Y) = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}(X), \text{Var}(Y)}} = -(1/4)/(1/2) = -0.5$
3. Poiché $\rho(X,Y) \neq 0$ abbiamo che $X,Y$ non sono indipendenti.
4. $\mathbb{P}(X \geq Y) = \frac{5}{8}$.

**Soluzione esercizio 9.**

1. Si osservi che $S_N(\omega) := \sum_{i=0}^{\infty} I_{\{N=i\}}(\omega) S_n$, pertanto è una variabile aleatoria. Essendo $S_N$ una variabile discreta, dalla legge delle probabilità totali

si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_N = i) &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_N = i|N = j)\mathbb{P}(N = j)\\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_j = i|N = j)\mathbb{P}(N = j)\\ &= \sum_{j=i}^{\infty} \binom{j}{i} p^i (1-p)^{j-i} e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!}\\ &= \binom{j}{i} \frac{(p\lambda)^i}{i!} e^{-\lambda} \sum_{h\geq 0} ((1-p)\lambda)^h \frac{1}{h!}\\ &= \frac{(p\lambda)^i}{i!} e^{-p\lambda}\end{aligned}$$

pertanto $S_N \sim \mathrm{Poi}(p\lambda)$.

2. Similmente

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N - S_N = i) &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(N - S_N = i|N = j)\mathbb{P}(N = j)\\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_j = j - i|N = j)\mathbb{P}(N = j)\\ &= \sum_{j=i}^{\infty} \binom{j}{i} p^{j-i} (1-p)^i e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!}\\ &= \frac{((1-p)\lambda)^i}{i!} e^{(1-p)\lambda}\end{aligned}$$

da cui $N - S_N \sim \mathrm{Poi}((1-p)\lambda)$.

3. Essendo, ad esempio, $\mathbb{P}(N - S_N = i|N = j) = 0$ per ogni $j < i$ mentre $\mathbb{P}(N - S_N = i) \neq 0$ e $\mathbb{P}(N = j) \neq 0$ allora non sono indipendenti.

4. Dalla formula di Bayes, e dai punti precedenti, si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N = k|S_N = i) &= \frac{\mathbb{P}(S_N = i|N = k)\mathbb{P}(N = k)}{\mathbb{P}(S_N = i)}\\ &= \begin{cases} 0 & k < i \\ \dfrac{(\lambda(1-p))^{k-i}}{(k-i)!} \exp(-\lambda(1-p)) & k \geq i, \end{cases}\end{aligned}$$

pertanto la distribuzione di $N$ condizionata ad $S_N$ è una Poissoniana "traslata".

**Soluzione esercizio 10.**

1. Si ricordi che $\mathrm{Rg}(f \circ Z) = f(\mathrm{Rg}(Z))$ e che $\mathbb{P}(f \circ Z = a) = \mathbb{P}(\{z \in \mathrm{Im}(Z) : f(z) = a\})$ per ogni $a \in \mathrm{Im}(f \circ Z)$ (i.e. $\mathbb{P}_{f \circ Z}(\cdot) := \mathbb{P}((f \circ Z)^{-1}(\cdot) = \mathbb{P}(Z^{-1} \circ f^{-1}(\cdot)) = \mathbb{P}_Z(f^{-1}(\cdot)))$. (Più precisamente $\mathrm{essRg}(f \circ Z) := \{x : \forall U \in \mathcal{U}_x, \mathbb{P}_Z(f^{-1}(U)) > 0\}$ che coincide, se $f$ è continua (su $\mathrm{essRg}(Z)$), con $\overline{f(\mathrm{essRg}(Z))}$). Per una variabile puramente discreta $Z$ (anche vettoriale) si ha $\mathrm{Rg}(Z) \equiv \mathrm{essRg}(Z) = \{a : \mathbb{P}(Z = a) > 0\}$. Pertanto

| $a \in \mathrm{Im}(XY)$ | $\mathbb{P}(XY = a)$ |
|---|---|
| 1 | 1/9 |
| 0 | 8/9. |

2. Si osservi che
$$\mathbb{P}(XY = i) = \begin{cases} 8/9 & i = 0 \\ 1/9 & i = 1 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$
da cui $\mathrm{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$,
$$\mathbb{E}(X) = -\frac{6}{36} - \frac{30}{36} = -1$$
$$\mathbb{E}(Y) = -\frac{5}{36} + \frac{1}{36} = -\frac{4}{36}$$
$$\mathbb{E}(XY) = \frac{4}{36}$$
da cui $\mathrm{cov}(X, Y) = \frac{4}{36} - \frac{4}{36} = 0$. Le due v.a. non sono correlate.

3. Si ha:
$$\mathbb{P}(X = -1, Y = 1) = 0 \neq \mathbb{P}(X = -1)\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{216}$$
quindi $X$ ed $Y$ non sono indipendenti.

   Un altro modo per vedere la stessa cosa è osservare che, per una coppia di variabili discrete, se la densità congiunta soddisfa $p_{ij} = 0$ per qualche $i, j$ allora si ha $p_{i,j_1} = 0$ per ogni $j_1$ e $p_{i_1,j} = 0$ per ogni $i_1$.

4. Considerando $(X, |Y|) = f(X, Y)$ con $f(a, b) := (a, |b|)$ da cui

| | $\|Y\| = 1$ | $\|Y\| = 0$ |
|---|---|---|
| X=-15 | 0 | 1/18 |
| X=-1 | 1/9 | 1/18 |
| X=0 | 1/18 | 13/18, |

   se ora $X - |Y| = g(X, |Y|)$ dove $g(a, b) := a - b$ allora

| $X - \|Y\| = a$ | $\mathbb{P}(X - \|Y\| = a)$ |
|---|---|
| X=-15 | 1/18 |
| X=-2 | 1/9 |
| X=-1 | 1/9, |
| X=0 | 13/18. |

**Soluzione esercizio 11.**
Si veda il prossimo esercizio.

**Soluzione esercizio 12.**
La variabile aleatoria $X$ ha distribuzione ipergeometrica:

$$\mathbb{P}(X=k)=\frac{\binom{b}{k}\binom{r}{n-k}}{\binom{b+r}{n}} \qquad k=0\vee n-r,\dots,b\wedge n.$$

Per calcolare media e varianza di $X$, si può affrontare un conto elementare ma laborioso, utilizzando le formule per il calcolo di media e varianza, ossia

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{k=0\vee n-r}^{b\wedge n} k\frac{\binom{b}{k}\binom{r}{n-k}}{\binom{r+b}{n}} \qquad \mathbb{E}(X^2)=\sum_{k=0\vee n-r}^{b\wedge n} k^2\frac{\binom{b}{k}\binom{r}{n-k}}{\binom{r+b}{n}} \qquad \mathrm{Var}(X)=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2$$

e le proprietà dei coefficienti binomiali. Alternativamente, possiamo impostare il problema nel modo seguente: supponiamo che le biglie siano estratte sequenzialmente e definiamo le variabili $X_1,\dots,X_n$ come

$$X_i=\begin{cases}1 & \text{se la biglia è bianca}\\ 0 & \text{se la biglia è rossa.}\end{cases}$$

Espressa in termini del vettore $X_1,\dots,X_n$, $X$ risulta $X=\sum_{j=1}^n X_j$. È facile dimostrare che la funzione di densità congiunta del vettore $X_1,\dots,X_n$ è data da

$$\mathbb{P}(X_1=x_1,\dots,X_n=x_n)=\frac{b(b-1)\cdots(b-\sum_{j=1}^n x_j+1)r(r-1)\cdots(r-n+\sum_{j=1}^n x_j+1)}{(r+b)(r+b-1)\cdots(r+b-n+1)}$$

con $x_j=0,1\forall j=1,\dots,n$. Notiamo che la distribuzione trovata per il vettore dipende dalle realizzazioni $(x_1,\dots,x_n)$ soltanto tramite la somma $\sum_{j=1}^n x_j$, quindi, se si permuta l'ordine delle variabili aleatorie nel vettore $X_1,\dots,X_n$, la distribuzione non cambia. In altri termini vale la seguente proprietà: per ogni permutazione $\pi_1,\dots,\pi_n$ di $(1,2,\dots,n)$

$$\mathbb{P}(X_1=x_1,\dots,X_n=x_n)=\mathbb{P}(X_{\pi_1}=x_1,\dots,X_{\pi_n}=x_n).$$

Se ne deduce che

(a) $\forall j=2,\dots,n$ $X_j$ e $X_1$ hanno la stessa legge

(b) $\forall i\neq j\in\{1,2,\dots,n\}$ i vettori $(X_i,X_j)$ e $(X_1,X_2)$ hanno la stessa legge.

Dimostriamo a titolo di esempio $(a)$: $\forall j=2,\dots,n$ $\mathbb{P}(X_j=x_j)=\mathbb{P}(X_1\in\{0,1\},\dots,X_{j-1}\in\{0,1\},X_j=x_j,X_{j+1}\in\{0,1\},\dots,X_n\in\{0,1\})=\mathbb{P}(X_1=x_j,X_2\in\{0,1\},X_j\in\{0,1\},X_{j+1}\in\{0,1\},\dots,X_n\in\{0,1\})=\mathbb{P}(X_1=x_j)$.

D'altro canto,

$$\mathbb{P}(X_1 = x) = \begin{cases} \frac{r}{b+r} & x = 0 \\ \frac{b}{b+r} & x = 1 \\ 0 & \textit{altrove} \end{cases} \qquad [X_i \sim \mathbf{Be}(b/(r+b))]$$

e

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \begin{cases} \frac{r(r-1)}{(b+r)(b+r-1)} & \text{se } x_1 = x_2 = 0 \\ \frac{r \cdot b}{(b+r)(b+r-1)} & \text{se } x_1 = 0 \text{ e } x_2 = 1 \text{ oppure } x_1 = 1 \text{ e } x_2 = 0 \\ \frac{b(b-1)}{(b+r)(b+r-1)} & \text{se } x_1 = x_2 = 1 \end{cases}$$

Quindi,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = \frac{nb}{r+b}.$$

Per quanto concerne la varianza, poiché le $X_i$ *non sono variabili indipendenti*, [quindi *non è vero che la varianza è uguale alla somma delle varianze*], si applica la formula generale

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} \mathrm{Cov}(X_i, X_j). \tag{1}$$

Da $X_i \sim \mathbf{Be}(b/(r+b))$, risulta

$$\mathrm{Var}(X_i) = \frac{b}{r+b}\left(1 - \frac{b}{r+b}\right) = \frac{br}{(r+b)^2}.$$

Mentre, per la covarianza,

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) &= \mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \mathbb{E}(X_1 X_2) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) - \left(\frac{nr}{r+b}\right)^2 \\ &= \frac{b(b-1)}{(b+r)(b+r-1)} - \left(\frac{nr}{r+b}\right)^2 \\ &= -\frac{b \cdot r}{(b+r)^2(b+r-1)}; \end{aligned}$$

In definitiva dalla (1) otteniamo:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \frac{nbr}{(b+r)^2} - \frac{n(n-1)br}{(b+r)^2(b+r-1)} = \\ &= \frac{nbr}{(b+r)^2}\left(1 - \frac{n-1}{b+r-1}\right). \end{aligned}$$

Per ogni coppia di variabili aleatorie $X_i, X_j$ il coefficente di correlazione lineare fra $X_i, X_j$ ha valore: $\rho(X_i, X_j) = \rho(X_1, X_2) = -\frac{1}{b+r-1} \to 0$ se $b + r \to +\infty$

La variabile aleatoria $X$ ha distribuzione ipergeometrica:

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{b}{k}\binom{r}{n-k}}{\binom{b+r}{n}} \qquad k = 0 \vee n-r, \dots, b \wedge n.$$

Per calcolare la media di $X$, si può affrontare un conto elementare ma laborioso, utilizzando le formule per il calcolo della media, ossia

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0 \vee n-r}^{b \wedge n} k \frac{\binom{b}{k}\binom{r}{n-k}}{\binom{r+b}{n}}$$

e le proprietà dei coefficienti binomiali. Espressa in termini del vettore $X_1, \dots, X_n$, $X$ risulta $X = \sum_{j=1}^{n} X_j$. La distribuzione trovata per $X_1$ è uguale a quella delle altre $X_2, \dots, X_n$. Infatti, supponiamo che le biglie siano numerate in modo che le prime $b$ siano bianche e le restanti $b+1, \dots, b+r$ siano rosse: la probabilità dell' evento $\mathbb{P}(X_1 = 1)$ si può determinare con il criterio delle scelte successive: possiamo scegliere la prima pallina, che deve essere bianca, in $b$ modi, poi le altre possibili scelte sono $D_{b+r-1,n-1}$.

$$\mathbb{P}(X_1) = \frac{\{\text{"casi favorevoli"}\}}{\{\text{"casi possibili"}\}} = \frac{b(b+r-1)(b+r-2)\dots(b+r-n-1)}{|D_{b+r,n}|} = \frac{b}{b+r}$$

riassumendo:

$$\mathbb{P}(X_1 = x) = \begin{cases} \frac{r}{b+r} & x = 0 \\ \frac{b}{b+r} & x = 1 \\ 0 & \mathit{altrove} \end{cases}$$

Siccome il ragionamento non dipende dalla posizione (nella $n$-upla di palline estratte) della pallina bianca, abbiamo che $X_i \sim \mathbf{Be}(b/(r+b))$ per ogni $i = 1, \dots, n$ . Quindi, sfruttando la linearità del valore atteso, si ha che

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = \frac{nb}{r+b}.$$

**Soluzione esercizio 13.**

Ricordiamo che se $X$ è una variabile aleatoria a valori in $Z$ (dotato della $\sigma$-algebra $\Sigma_Z$) ed $F : Z \to \mathbb{R}^n\,(\mathbb{C}^n)$ è una funzione misurabile allora $F \circ X$ è $\mathbb{P}$-integrabile se e solo se $F$ è $\mathbb{P}_X$ integrabile e vale

$$\int_\Omega F \circ X \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_Z F \mathrm{d}\mathbb{P}_X = \int \rho_X(\underline{x}) F(\underline{x}) \mathrm{d}\underline{x}$$

dove l'ultima uguaglianza è vera se $Z$ è $\mathbb{R}^m$ oppure $\mathbb{C}^m$ e la legge di $X$ ammette densità.

1. Sia $U = X$, $Z = X+Y$. Allora $f_{U,Z}(u,z) = f_{X,Y}(u, z-u) = \frac{1}{2} z e^{-z} I_{(0,z)}(u) I_{(0,+\infty)}(z)$, e

$$f_Z(z) = \int_0^z \frac{1}{2} z e^{-z} du I_{(0,+\infty)}(z) = \frac{1}{2} z e^{-z} I_{(0,+\infty)}(z) \int_0^z du = \frac{1}{2} z^2 e^{-z} I_{(0,+\infty)}(z),$$

cioè $Z \sim \Gamma(3,1)$.

2.

$$f_X(x) = \frac{1}{2}(x+1)e^{-x} I_{(0,+\infty)}(x) \qquad\qquad f_Y(y) = \frac{1}{2}(y+1)e^{-y} I_{(0,+\infty)}(y)$$

$X$ e $Y$ non sono indipendenti.

3. Ricordando che se $\{X_i\}_{i=1}^n$ è una successione i.i.d. di variabili di legge $\Gamma(\lambda, \alpha)$ allora $\sum_{i=1}^n X_i$ ha legge $\Gamma(n\lambda, \alpha)$ allora siano $X_1, X_2, X_3$ i.i.d. $\sim \mathcal{E}(1)$, poiché $X+Y$ è $\Gamma(3,1)$, allora la densità di $X+Y$ coincide con la densità di $X_1 + X_2 + X_3$. Pertanto $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X_1 + X_2 + X_3) = 3\mathbb{E}X_1 = 3$.

4.

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{Z}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{z} z^2 e^{-z} \mathrm{d}z = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} z e^{-z} \mathrm{d}z = \frac{1}{2}.$$

**Soluzione esercizio 14.**

Si ricordi che una variabile aleatoria a valori reali è assolutamente continua se e solo se la sua funzione di ripartizione è assolutamente continua su $\mathbb{R}$. Per un noto teorema $F$ è assolutamente continua se e solo se esiste $f$ tale che

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \qquad \forall b, a \in \mathbb{R} : b > a$$

ed in tal caso $F$ è differenziabile quasi ovunque e vale $F' = f$ quasi ovunque.

1. Da esercizi precedenti si ottiene $F_Z(t) = F^n(x)$.
2. Allo stesso modo si ha $F_W(t) = 1 - (1 - F(t))^n$.
3. Per quanto detto all'inizio della soluzione dell'esercizio 13, si ha che la funzione $Z$ ammette densità (poichè trasformata attraverso la funzione misurabile max del vettore aleatorio $(X_1, \ldots, X_n)$ che ammette densità congiunta $f(t_1) \cdot \cdots \cdot f(t_n)$. Poichè quasi certamente $F$ è differenziabile (con derivata $f$) allora dal teorema della differenziabilità di una funzione composta, $F_Z$ è quasi certamente differenziabile e vale $F_Z'(t) = nF^{n-1}(t)f(t)$ ed essa è la densità (per il risultato citato all'inizio).
4. Analogamente la densità di $W$ è $n(1 - F(t))^{n-1} f(t)$.

**Soluzione esercizio 15.**
Se $t \geq 0$:

$$\mathbb{P}(\min(X,Y) \leq t) = 1-\mathbb{P}(\min(X,Y) > t) = 1-\mathbb{P}(X > t)\mathbb{P}(Y > t) = 1-e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}$$

Altrimenti se $t < 0$, $\mathbb{P}(\min(X,Y) \leq t) = 0$.
Da cui si evince che $\min(X,Y) \sim \text{Exp}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

**Soluzione esercizio 16.**
a) Il complesso è in serie quindi se $T_1$, $T_2$ e $T_3$ sono i tempi di vita dei tre componenti semplici, avremo che $T = \min\{T_1, T_2, T_3\}$. Per calcolarne la legge calcoliamo la funzione di ripartizione di $T$ si ha:

$$F_T(t) = 1-\mathbb{P}(T > t) = 1-\mathbb{P}(T_1 > t, T_2 > t, T_3 > t) = (1-e^{-0.3t}e^{-0.1t}e^{-0.2t})I_{(0,+\infty)}(t)$$

Quindi $\sim \text{Exp}(0.6)$.
b) Se mettiamo in parallelo due apparecchi uguali a quello in figura, i tempi di vita dei due apparecchi che chiameremo $U$ e $W$ hanno la stessa legge e sono indipendenti. Quindi $S = \max\{U, W\}$ da cui

$$F_S(t) = F_T(t)^2 = (1 - e^{-0.6 \cdot t})^2 I_{[0,+\infty)}(t)$$

da cui si ricava la densità

$$f_S(t) = \begin{cases} 2(1 - e^{-0.6t})(0.6)e^{-0.6t} & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t < 0. \end{cases}$$