10 Esercitazione 10: / /

10.1 Vettori aleatori.

Esercizio 1 *Siano X e Y due v.a. indipendenti entrambe con densità uniforme su $[0,1]$.*

1. *Si calcoli la densità di $X+Y=Z$, la media e la varianza di Z.*

2. *Sia $T = X + Y - I_{\{X+Y>1\}}$, trovare la legge di T.*

Esercizio 2 *Su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ siano X ed Y due variabili aleatorie reali indipendenti, a valori in $(0, +\infty)$, con leggi $\Gamma(a, \lambda)$ e $\Gamma(b, \lambda)$, rispettivamente.*

1. *Si provi l'indipendenza delle due variabili aleatorie T, U, così definite:*

$$T = X + Y \qquad U = \frac{X}{X+Y}.$$

2. *Si consideri su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ una successione $(X_n)_{n\geq 1}$ di variabili aleatorie con legge esponenziale di parametro λ, e posto*

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n,$$

si provi che per ogni coppia di interi (k, n), con $1 \leq k \leq n$, la variabile aleatoria $\frac{S_k}{S_n}$ è indipendente da S_n. Sfruttando quest'ultimo risultato si calcoli la media di $\frac{S_k}{S_n}$.

Esercizio 3 *Su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sia $N, X_1, X_2, \ldots$ una successione di variabili aleatorie reali indipendenti delle quali la prima abbia legge geometrica di parametro p e le altre abbiano leggi esponenziali di parametro λ. Sia inoltre Y la variabile aleatoria reale che, sull'evento $\{N = n\}$ coincide con $\min(X_1, \ldots, X_n)$.*

1. *Si calcoli $\mathbb{P}(Y > t)$, per ogni $t > 0$ numero reale.*

2. *Se ne ricavi la media di Y.*

Esercizio 4 *Sia (X, Y) il vettore aleatorio con la seguente densità congiunta:*

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-(x+y)} & \text{se } x > 0,\ y > 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

1. *Le due v.a. X ed Y sono indipendenti? Quali sono le loro rispettive leggi?*
2. *Calcolare $Var(X+Y)$.*
3. *Si calcolino i valori attesi delle due v.a. U e V definite come segue:*

$$U = \min\{X, Y\}, \qquad V = \max\{X, Y\}$$

Esercizio 5 *Sia $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ un vettore aleatorio con legge normale $N(m, C)$, dove $m = 0$ e C è la matrice*

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Scrivere la densità congiunta $f(x_1, x_2)$ del vettore X.

SOLUZIONI

Soluzione esercizio 1.

1. Utilizziamo la formula della convoluzione

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-u) f_Y(u) \mathrm{d}u = \int_0^1 f_X(z-u) \mathrm{d}u \\ &= \int_0^1 I_{(0,1)}(z-u) \mathrm{d}u = F_X(\min(z,1)) - F_X(\max(z-1,0)) \end{aligned}$$

da cui

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \geq 2 \\ 2-z & 1 \leq z < 2 \\ z & 0 < z < 1 \\ 0 & z \leq 0 \end{cases} \tag{1}$$

Sfruttando la linearità del valore atteso:

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 1/2 + 1/2 = 1$$

Inoltre X e Y sono indipendenti da cui:

$$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) = 1/12 + 1/12 = 1/6$$

2. $T \in [0,1]$, quindi calcoliamo la funzione di ripartizione per $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T \leq t) &= \mathbb{P}(T \leq t, X+Y \leq 1) + \mathbb{P}(T \leq t, X+Y > 1)\\ &= \mathbb{P}(X+Y \leq t, X+Y \leq 1) + \mathbb{P}(X+Y \leq t+1, X+Y > 1)\\ &= \int_0^t z\mathrm{d}z + \int_1^{t+1} (2-z)\mathrm{d}z = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{(1-t)^2}{2} = t\end{aligned}$$

Allora possiamo concludere che:

$$\mathbb{P}(T \leq t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 1 \\ t & \text{se } t \in [0,1) \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

Deduciamo che $T \sim U([0,1])$.

Soluzione esercizio 2.

1. Il vettore (T,U) è ottenuto tramite un diffeomorfismo (verificatelo !) $\phi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \times (0,1)$ dal vettore (X,Y). Abbiamo che $\phi^{-1}(t,u) = (tu, t(1-u))$ con $|\det J(\phi^{-1})| = t$. Allora

$$f_{(T,U)}(t,u) = t\, f_{(X,Y)}(tu, t(1-u)) = \frac{\lambda^{a+b} \cdot t^{a+b-1}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} e^{-\lambda t} I_{(0,+\infty)}(t) u^{a-1}(1-u)^{b-1} I_{(0,1)}(u).$$

Da ciò deduciamo che T ed U sono indipendenti e che T ha legge gamma (cosa che avete già visto a lezione). Sfruttando quest' ultimo fatto abbiamo che U ha densità: $\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} u^{a-1}(1-u)^{b-1} I_{(0,1)}(u)$, ovvero U ha legge $\beta(a,b)$.

2. Supponiamo che $k < n$, altrimenti $\frac{S_k}{S_n} \equiv 1$ e non vi è nulla da dimostrare. Notiamo che $S_n = S_k + X_{k+1} + \cdots + X_n$. Notiamo che $S_k \sim \Gamma(k,\lambda)$ e $X_{k+1} + \cdots + X_n \sim \Gamma(n-k,\lambda)$ e sono indipendenti fra di loro (perché funzioni di variabili indipendenti fra di loro). Ponendo $X = S_k$ ed $Y = X_{k+1} + \cdots + X_n$ ci riconduciamo al caso appena risolto al punto 1, quindi abbiamo che $\frac{X}{X+Y} = \frac{S_k}{S_n}$ è indipendente da $X+Y = S_n$.
Inoltre $\mathbb{E}(S_k) = \mathbb{E}(S_n \cdot \frac{S_k}{S_n}) = \mathbb{E}(S_n)\mathbb{E}(\frac{S_k}{S_n})$, da cui $\mathbb{E}(\frac{S_k}{S_n}) = \frac{\mathbb{E}(S_k)}{\mathbb{E}(S_n)} = \frac{k}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{n} = \frac{k}{n}$.

Soluzione esercizio 3.

1. Per ogni $n > 0$ si ha che $\{Y > t, N = n\} = \{\min(X_1, \dots, X_n) > t, N = n\}$, quindi abbiamo la seguente identità, vera grazie all'ipotesi di indipendenza:

$$\mathbb{P}(Y > t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\min(X_1, \dots, X_N) > t | N = n)\mathbb{P}(N = n)$$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\min(X_1, \dots, X_n) > t | N = n)\mathbb{P}(N = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\min(X_1, \dots, X_n) > t)\mathbb{P}(N = n)$$

   Notiamo che il minimo di n esponenziali indipendenti di parametro λ è ancora un'esponenziale di parametro $n\lambda$, si veda l'esercizio 9.3.2 del 28 Maggio, quindi:

$$\mathbb{P}(Y > t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\min(X_1, \dots, X_n) > t)\mathbb{P}(N = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n\lambda t} p(1-p)^{n-1}$$
$$= e^{-\lambda t} p \sum_{n=1}^{+\infty} [e^{-\lambda t}(1-p)]^{n-1} = \frac{e^{-\lambda t} p}{1 - e^{-\lambda t}(1-p)}$$

2. Y è una v.a. non negativa quasi certamente, quindi:

$$\mathbb{E}(Y) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Y > t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda t} p}{1 - e^{-\lambda t}(1-p)}\mathrm{d}t = -\frac{p \cdot \ln(p)}{\lambda(1-p)}$$

   L'integrale si può svolgere per sostituzione, ponendo $f(t) = 1 - e^{-\lambda t}(1-p)$, infatti si ha che:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda t} p}{1 - e^{-\lambda t}(1-p)}\mathrm{d}t = \frac{p}{\lambda(1-p)} \int_0^{+\infty} \frac{f'(t)}{f(t)}\mathrm{d}t = \dots$$

Soluzione esercizio 4.

1. Sì infatti, la densità congiunta è prodotto di una funzione che dipende solo da x ed una che dipende solo da y: $f(x, y) = xe^{-x} I_{(0,+\infty)}(x) e^{-y} I_{(0,+\infty)}(y)$. Le densità marginali sono già fornite dalla densità congiunta e in questo caso anche con le costanti giuste. La legge di X, avendo densità $xe^{-x} I_{(0,+\infty)}(x)$ è una $\Gamma(2, 1)$ e la legge di Y è un' esponenziale di parametro 1.

2. X ed Y sono indipendenti con leggi note, quindi: Var$(X+Y)$ =Var(X)+Var(Y)= $2 + 1 = 3$.

3. Si ha che $U = XI_{\{Y>X\}} + YI_{\{Y \le X\}}$, quindi

$$\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(XI_{\{Y>X\}}) + \mathbb{E}(YI_{\{Y \le X\}})$$
$$= \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} x^2 e^{-x} e^{-y}\, dy)\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} (\int_y^{+\infty} xy e^{-x} e^{-y} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \frac{3}{4}$$

Notiamo che $U+V = X+Y$ quindi $\mathbb{E}(V) = \mathbb{E}(X+Y) - \mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(U) = 2 + 1 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$.

Esercizio 6 *Due numeri X ed Y vengono scelti a caso e indipendentemente con distribuzione uniforme su* $[0,1]$.

1. *Calcolare* $\mathbb{P}(|X-Y| > 1/2)$.
2. *Sia Z la variabile aleatoria che misura la distanza fra X ed Y. Qual è la densità di Z? Qual è la distanza media fra X ed Y?*

Soluzione esercizio 6.

[Risultati: 1) $\mathbb{P}(|X-Y| > 1/2) = 1/4$, 2) $f_Z(t) = 2(1-t)I_{(0,1)}(t)$, $\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{3}$.]

Soluzione esercizio 5.

[Risultato: $f(x_1, x_2) = \frac{1}{6\pi} \exp\left(-\frac{1}{18}(2x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2)\right)$.]