12 Esercitazione 12: / /

12.1 Applicazioni del TCL

Esercizio 1 *Una ditta di trasporti internazionali possiede 100 tir dello stesso tipo. Ogni tir percorre una media di 600 km al giorno con una deviazione standard di 50 km.*

1. *Supponendo che i giorni lavorativi in un anno siano 340, quanti chilometri percorre mediamente un tir in un anno?*
2. *Una merce deve essere trasportata da un tir ad una distanza di 7000 km.. Viene chiesto al titolare dopo quanti giorni dalla partenza avverrà la consegna. Che risposta deve dare il titolare affinchè con probabilità almeno pari a 0.9 la merce arrivi a destinazione entro il tempo dichiarato?*

Esercizio 2 *Il tempo di lavorazione di un pezzo meccanico è una variabile aleatoria di media $\mu = 2$ minuti e deviazione standard $\sigma = 0,3$ minuti.*

1. *In approssimazione normale, calcolare la probabilità di effettuare la lavorazione di* 150 *pezzi in un tempo minore di 5 ore e 10 minuti.*
2. *In approssimazione normale, calcolare la probabilità che la media campionaria dei tempi di lavorazione relativa a 100 pezzi sia compresa tra 1 minuto e 55 secondi e 2 minuti e 10 secondi.*
3. *Quanti pezzi dobbiamo misurare per essere certi al 95% che la media dei loro tempi di lavorazione non differisca da 2 minuti per più di 4 secondi?*

Esercizio 3 *Un ingegnere civile costruisce un ponte che può sopportare un peso massimo di 200 tonnellate. Si supponga che il peso (espresso in tonn.) di un'automobile sia una v.a. di media 1 e dev.st. 0.1.*
Quante auto devono transitare contemporaneamente sul ponte affinché con probabilità superiore a 0.1 venga superato il peso massimo sopportato dal ponte?

Esercizio 4 *La distanza d di una stella è calcolata come la media di una serie di misurazioni indipendenti e identicamente distribuite con media d e varianza 4.*
Quante osservazioni sono necessarie per essere sicuri al 95% che la media delle osservazioni approssimi d entro 0.5?

12.2 Approssimazione normale della distribuzione Binomiale

Esercizio 5 *La percentuale di realizzazione nei tiri da due punti di un giocatore di pallacanestro è del 55%. Si calcolino:*

1. *la probabilità che segni non più di 50 punti in 50 tiri*
2. *il numero minimo di tiri che deve effettuare affinché la probabilità di segnare almeno 100 punti sia non inferiore a 0.9*

Esercizio 6 *Due dadi equilibrati vengono lanciati 300 volte. Sia X la variabile aleatoria che indica il numero di volte che si è ottenuto un doppio uno.*

1. *Calcolare* $\mathbb{E}(X)$ *e* $\mathrm{var}(X)$
2. *Calcolare in modo approssimato la probabilità di ottenere un doppio uno più di 10 volte.*
3. *Quante volte bisogna lanciare i due dadi affinché la probabilità di ottenere un doppio uno più di 10 volte sia maggiore di 0.5?*

Esercizio 7 *Si consideri un sistema elettronico composto da* $n = 100$ *componenti e che funziona se e solo se almeno 30 componenti su 100 funzionano. Si supponga inoltre che tutte le componenti abbiano la stessa probabilità di funzionare* $p = 0.2$ *e che funzionino indipendentemente una dall'altra.*

1. *In base al modello dato, qual è il numero atteso di componenti funzionanti? Quanto vale la varianza del numero di componenti funzionanti?*
2. *Calcolare in modo approssimato la probabilità che il sistema testé descritto funzioni.*
3. *Fornite una stima della probabilità che il numero di componenti NON funzionanti sia compreso fra 72 e 88 (inclusi).*

12.3 Approssimazione normale della distribuzione di Poisson

Esercizio 8 *Si supponga che il numero di molecole di sodio in un cl. di acqua minerale sia descritto da una v.a. di Poisson con media 1000. Si calcoli la probabilità che 10 cl. di acqua contengano più di 10000 molecole.*

Esercizio 9 *Il costo di una inserzione sul 'News' è il seguente:*
60 centesimi per annunci di lunghezza non superiore a 8 righe
1 euro per annunci di lunghezza superiore a 8 righe ma non superiore a 12
1.25 euro per annunci di lunghezza superiore a 12 righe ma non superiore a 16

1.55 euro per annunci di lunghezza superiore a 16.
Un cinema pubblicizza gli spettacoli sulle pagine del 'News', mediante annunci di lunghezza media (calcolata lungo un anno) pari a 12 righe. Si supponga che la lunghezza delle inserzioni del cinema sia descrivibile con una v.a. di Poisson. Usando l'approssimazione normale si determini il costo medio delle inserzioni.

12.4 Approssimazione normale e Poisson della distribuzione Binomiale

Esercizio 10 *In media in un paracadute su 1000 il paracadute principale è difettoso e non si apre durante il lancio. Un paracadutista professionista compie 4000 lanci nella sua carriera; indichiamo con X la variabile aleatoria che conta il numero di volte in cui il paracadute principale non si apre.*

1. *Se si approssima la distribuzione di X con una Normale, quanto vale la probabilità che il paracadute principale non si apra in almeno uno dei 4000 lanci?*
2. *Quanto vale la probabilità appena calcolata, se si approssima la distribuzione di X con una Poisson?*
3. *Quale delle due approssimazione è migliore e perché?*

12.5 Riepilogo

Esercizio 11 *Sia $X_1, \dots, X_n$ una sequenza di variabili i.i.d. e $Y_1, \dots, Y_n$ l'ordinamento.*

1. *Si determini $F_{(Y_1,\dots,Y_n)}(t_1, \dots, t_n)$ la funzione di ripartizione congiunta di $Y_1, \dots, Y_n$.*
2. *Si determini esplicitamente la funzione di ripartizione congiunta di $Y_1 = \min(X_1, \dots, X_n)$ e $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.*

Esercizio 12 *n dadi equi vengono lanciati e si osservano i numeri che escono. Sia U il valore minimo dei due numeri usciti e W il massimo. Si determini la legge di (U, W).*

Esercizio 13 *Siano X e Z due v.a. indipendenti tali che $X \sim \mathbf{N}(0, 1)$ e Z abbia legge: $\mathbb{P}(Z = 1) = \frac{1}{2}$ e $\mathbb{P}(Z = -1) = \frac{1}{2}$. Si ponga $Y = ZX$.*

1. *Che legge ha Y? Si calcoli $\mathrm{Cov}(X, Y)$.*
2. *Mostrare che $X + Y$ non è una gaussiana.*
3. *(X, Y) è un vettore gaussiano?*

4. *Ricordiamo che una collezione $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ si dice collezione indipendente di famiglie di eventi (risp. variabili) se e solo se per ogni $S \subseteq I$ finito ed ogni $\{A_i\}_{i\in S}$ (tale che $A_i \in \mathcal{A}_i$ per ogni $i \in S$) è un'insieme di eventi indipendenti (risp. variabili indipendenti). Mostrare che la collezione $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$ definita da $\mathcal{A}_1 := \{X, XY\}$ e $\mathcal{A}_2 := \{Y\}$ è indipendente, pur non essendo X ed XY indipendenti. Mostrare inoltre che le variabili $Z := (X, XY)$ e Y non sono indipendenti. Infine fare un esempio di variabili Z_1, Z_2, Z_3 tali che Z_1 e Z_2 non sono indipendenti, ma (Z_1, Z_2) e Z_3 lo sono.*

Esercizio 14 *Siano μ e ν due misure di probabilità su $\mathbb{R}$ tali che $F_\mu(t) \geq F_\nu(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ (dove F_μ ed F_ν sono le funzioni di ripartizione delle leggi μ e ν rispettivamente). Supponiamo che le due leggi ammettano media (i.e. $\int_{\mathbb{R}} |x| \mathrm{d}\mu(x) < +\infty$ e $\int_{\mathbb{R}} |x| \mathrm{d}\nu(x) < +\infty$) allora, definite $\mathbb{E}_\mu = \int_{\mathbb{R}} x \mathrm{d}\mu(x) < +\infty$ e $\mathbb{E}_\nu := \int_{\mathbb{R}} x \mathrm{d}\nu(x) < +\infty$, si ha*

1. $\mathbb{E}_\mu \leq \mathbb{E}_\nu$
2. $\mathbb{E}_\mu = \mathbb{E}_\nu$ *se e solo se* $\mu = \nu$.

Esercizio 15 *Siano $\{Z_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ estrazioni i.i.d. distribuite secondo una legge μ. Sia A tale che $\mu(A) > 0$ e si interrompa l'estrazione al primo istante in cui $Z_i \in A$ (cioè si consideri la variabile $Z_N(\omega) := Z_{N(\omega)}(\omega)$ dove $N := \inf\{i : Z_i \in A\}$.*

1. *Mostrare che l'estrazione ha termine con probabilità 1.*
2. *Mostrare che la legge di Z_N è $\mu(\cdot|A) := \mu(\cdot \cap A)/\mu(A)$.*

12.6 Nozioni di convergenza e teoremi limite.

Esercizio 16 *Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di v.a. tutte di legge gaussiana con media $\mathbb{E}(X_n) = b_n$ e $Var(X_n) = \sigma_n^2$. Supponiamo che $b_n \to b$ e $\sigma_n^2 \to \sigma^2$ quando $n \to +\infty$. Mostrare che X_n converge in legge ad v.a. con legge gaussiana di parametri b e σ^2.*

Esercizio 17 *Sia $X_0, X_1, \ldots,$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione gaussiana standard. Poniamo:*

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{X_0}{2} \\ V_1 &= \frac{X_1 + V_0}{2} \\ &\ldots\ldots \\ V_k &= \frac{X_k + V_{k-1}}{2} \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

1. *Determinare la legge di V_k per $k = 0, 1, 2, \ldots$.*
2. *Le V_k convergono in distribuzione ad una v.a. V? In caso affermativo determinare la legge di V.*
3. *Le V_n sono indipendenti?*

Esercizio 18 *Si consideri una v.a. aleatoria con legge $Beta(\alpha, \beta)$.*

1. *Mostrare che:*
$$\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \qquad Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$
2. *Mostrare che se $n \to +\infty$ e $X_n \sim Beta(na, nb)$ allora X_n converge in probabilità verso una v.a. costante di cui si determinerà il valore.*

Esercizio 19 *Sia $(X_n)_n$ una successione di v.a. indipendenti tutte di Poisson di parametro 4 e $S = X_1 + \cdots + X_{100}$.*

1. *Qual è la legge di S ?*
2. *Quanto vale $\mathbb{P}(S \leq 390)$ approssimativamente?*
3. *Se $X \sim$ Poisson di parametro 256, quanto vale approssimativamente $\mathbb{P}(X > 270)$?*
4. *Quante v.a. di Poisson di parametro 4 e i.i.d dobbiamo sommare (almeno) affinchè $\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n > 390) > 0.5$?*

Esercizio 20 *Sia (X_n) una successione di v.a. indipendenti, centrate, equidistribuite e di varianza finita $\sigma^2 > 0$.*

1. *Consideriamo la v.a. X_1X_2. Quanto vale la sua media? Ha varianza finita?*
2. *Poniamo:*
$$V_n = \frac{(X_1X_2 + \cdots + X_{2n-1}X_{2n})}{n}$$
Quali valori vi aspettate di osservare per V_n quando n è grande? Si può dire che V_n converge (e come) a qualcosa?
3. *Se fosse*
$$V_n = \frac{(X_1X_2 + \cdots + X_{2n-1}X_{2n})}{\sqrt{n}}?$$
4. *Supponiamo che $\mathbb{E}(X_1^4) < +\infty$, la successione:*
$$W_n = \frac{(X_1^4 + \cdots + X_n^4)}{n}$$

è convergente? A che cosa e in che modo?

Esercizio 21 *Sia (X_n) una successione di v.a. indipendenti tutte di legge Poisson di parametro λ. Quanto vale il limite*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \le n)?$$

Al variare di $\lambda > 0$?

Esercizio 22 *Sia $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. (**i**ndipendenti ed **i**denticamente **d**istribuite) tali che $\mathbb{E}(X_i) = \mu \in \mathbb{R}$. Mostrare che:*

1. *se $\lambda < \mu$ allora $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\sum_{i=1}^n X_i \le n\lambda) = 0$;*
2. *se $\lambda > \mu$ allora $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\sum_{i=1}^n X_i \le n\lambda) = 1$;*
3. *se $\mathrm{Var}(X_i) < +\infty$ e $\lambda = \mu$ allora $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\sum_{i=1}^n X_i \le n\lambda) = 1/2$.*
4. $$\lim_{n\to+\infty} e^{-n\mu} \sum_{i=0}^{[\lambda n]} \frac{(n\mu)^i}{i!} = \begin{cases} 0 & se\ \lambda < \mu \\ 1 & se\ \lambda > \mu \\ \frac{1}{2} & se\ \lambda = \mu. \end{cases}$$

Esercizio 23 *Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ una successione di v.a. tali che X_n ha legge geometrica di parametro $p_n = \frac{\lambda}{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}^*$. La successione $\{\frac{X_n}{n}\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge il legge? Qual è la legge limite?*

Esercizio 24 *Sia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ una successione di variabili aleatorie tali che $X_n \sim \chi^2(n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}^*$. La successione $\frac{X_n}{n}$ ammette limite? In quale senso?*

Esercizio 25 **** Sia f una funzione reale continua definita sull'intervallo $[0,1]$. Poniamo, per ogni numero reale x, $x \in [0,1]$ ed ogni intero $n \ge 1$:*

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,1]} |B_n(x) - f(x)| = 0.$$

Esercizio 26 *Sia Z una v.a. reale di densità:*

$$f(t) = \frac{1}{2t} I_{[e^{-1},e]}(t)$$

Calcolare la legge di $X = \ln Z$. Sia $(Z_n)_n$ una successione di v.a. indipendenti, tutte di legge data dalla densità di cui sopre. Mostrare che $(Z_1 ... Z_n)^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$ converge in legge ad una legge lognormale di parametri μ e σ^2 e calcolarli.

Esercizio 27 *Sia* $(X_n)_n$ *una successione di v.a. di Bernoulli indipendenti ed equidistribuite di parametro* $1/2$*. Per ogni intero positivo* k*, si denoti* a_k *(risp.* b_k*) la probabilità che, nelle prime* $2k$ *prove il numero di successi sia superiore (risp. uguale) a quello degli insuccessi. Applicando opportunamente il Teorema Centrale del Limite, si provi che la successione* $(a_k)_{k\geq 1}$ *converge verso* $1/2$ *mentre la successione* $(b_k)_{k\geq 1}$ *converge verso* 0.

Esercizio 28 *Si consideri uno spazio topologico* (Y, τ) *e la* σ*-algebra dei Borelliani (generata da* τ*)* $\sigma(\tau)$*. Sia* X *e* $\{X_n\}$ *rispettivamente una variabile aleatoria e una successione di variabili aleatorie definite su* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *a valori in* Y*. Mostrare che se*

$$\lim_{n\to+\infty} X_n = X, \qquad \mathbb{P} - q.c.$$

allora

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_{X_n}(A) = \mathbb{P}_X(A), \qquad \forall A \in \sigma(\tau) : \mathbb{P}_X(\partial A) = 0$$

dove ∂A *è la frontiera di* A.

Esercizio 29

1. *Sia* $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ *un'algebra di Banach (si può pensare al campo dei numeri complessi* $\mathbb{C}$*). Se* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *è una successione a valori in* $\mathcal{A}$ *convergente a* x *allora*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n = \exp(x) := \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^i}{i!}.$$

2. *Siano* $\{X_{n,i}\}_{n\in\mathbb{N}, i=0,1,\ldots,n}$ *variabili aleatorie tali che, per ogni* $n \in \mathbb{N}$, $\{X_{n,i}\}_{i=1}^n$ *sono i.i.d. e* $\mathrm{var}(X_{n,i}) = \sigma_n^2$ *e* $\mathbb{E}(X_{n,i}) = 0$*. Mostrare che se* $\sigma_n^2 \to \sigma^2$ *e se* $S_n := \sum_{i=0}^n X_{n,i}$ *allora*

$$\mathcal{L} - \lim_{n\to+\infty} \frac{S_N}{\sqrt{n}} = \begin{cases} Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) & \sigma^2 > 0 \\ Y \equiv 0 & \sigma^2 = 0. \end{cases}$$

Esercizio 30

1. *Siano* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *due successioni di variabili aleatorie a valori in uno spazio metrico* (Y, d) *tali che per ogni* $\epsilon > 0$ *si abbia* $\sum_{n=0}^\infty \mathbb{P}(d(X_n, Y_n) > \epsilon) < +\infty$*; allora* $\mathbb{P}(\{\omega : X_n(\omega) \text{ converge}\} \triangle \{\omega : Y_n(\omega) \text{ converge}\}) = 0$ *e* $\lim_{n\to+\infty} X_n = \lim_{n\to+\infty} Y_n$ $\mathbb{P}$*-q.c.*

2. *Sia* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di variabili aleatorie e* $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sequenza di numeri positivi. Se* $\sum_{n=0}^\infty \alpha_n < +\infty$ *e* $\sum_{n=0}^\infty \mathbb{P}(|X_n| > \alpha_n) < +\infty$ *allora*

$$\sum_{n=0}^\infty X_n \text{ converge assolutamente } \mathbb{P} - q.c.$$

Esercizio 31

1. *Sia* X *una variabile aleatoria e* $\{r_i\}$ *una sequenza di numeri positivi tali che* $r_0 = 0$ *e* $+\infty > \sup_i(r_{i+1} - r_i) =: M$ *e* $m := \inf_i(r_{i+1} - r_i) > 0$*. Mostrare che* $\int \|X\| \mathrm{d}\mathbb{P} < +\infty$ *se e solo se* $\sum_i \mathbb{P}(\|X\| \geq r_i)$.

2. *Sia* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sequenza di variabili aleatorie i.i.d. Se* $|alpha > 0$ *allora*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n^{1/\alpha}} = 0, \qquad \mathbb{P} - q.c.$$

se e solo se $\mathbb{E}(|X_1|^\alpha) < +\infty$.

Esercizio 32 1. *Mostrare che uno spazio metrico* (X, d) *è completo se e solo se ogni successione* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *soddisfacente* $\sum_{i=0}^{+\infty} d(x_i, x_{i+1}) < +\infty$ *converge.*

2. *Se* $\{X_n\}$ *è una successione di variabili aleatorie a valori in uno spazio metrico completo e* $\{\alpha_n\}$ *è una successione di valori positivi tale che* $\sum_n \alpha_n < +\infty$ *allora* $\sum_n \mathbb{P}(d(X_{n+1}, X_n) > \alpha_n) < +\infty$ *implica che* $\{X_n\}$ *converge* $\mathbb{P}$*-q.c.*

Esercizio 33 *Mostrare che se* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *è una successione di variabili aleatorie a valori in uno spazio metrico e se* $\{epsilon_n\}$ *e* $\delta_n\}$ *sono due successioni positive convergenti a* 0 *allora TFAE*

1. X_n *converge a* X *in probabilità a* X*;*

2. *Esiste* $\{n_i\}$ *tale che, per ogni* i,

$$\mathbb{P}(d(X_n, X) \geq \delta_i) \leq \epsilon_i, \qquad \forall n \geq n_i;$$

3. $\lim_{n\to+\infty} \rho(X_n, X) = 0$ *dove* ρ *è la metrica (mostrarlo!) così definita*

$$\rho(X, Y) := \mathbb{E}\left(\frac{d(X, Y)}{1 + d(X, Y)}\right);$$

4. $\lim_{n\to+\infty} \rho_1(X_n, X) = 0$ *dove* ρ_1 *è la metrica (mostrarlo!) così definita*

$$d(X, Y) := \mathbb{E}\left(\min(d(X, Y), 1)\right).$$

Esercizio 34 *Sia* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione di variabili aleatorie identicamente distribuite ed integrabili (non necessariamente indipendenti). Mostrare che*

$$\mathbb{P}(|X_n| < n \text{ definitivamente se } n \to +\infty) = 1.$$

Esercizio 35 *Sia* $\{A_n\}_{n\geq 1}$ *una collezione di eventi tali che* $\sum_{i=1}^{\infty}(1 - \mathbb{P}(A_i)) < +\infty$ *e sia*

$$X_n := \mathbb{1}_{A_n} - \frac{\mathbb{P}(A_n)}{1 - \mathbb{P}(A_n)} \mathbb{1}_{A_n^c}.$$

Mostrare che

1. $\mathbb{E}(X_n) = 0$ *per ogni* $n \geq 1$*;*

2.
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to 1 \qquad \mathbb{P}-q.c. \quad se\ n \to +\infty.$$

3. *Se la collezione $\{A_n\}_{n\geq 1}$ è composta di eventi indipendenti, cosa ci dicono i due punti precedenti riguardo alla legge dei grandi numeri?*

Esercizio 36 *Sia $T : \Omega \to \Omega$, $\Sigma_T := \{A \subseteq \Omega : T^{-1}(A) = A\}$ e $f : \Omega \to X$ dove (X, τ) è uno spazio lineare topologico (si pensi pure a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Mostrare che*

1. *Σ_T è una σ-algebra;*

2. *Se per ogni $\omega \in \Omega$ esiste*
$$\widetilde{f}(\omega) := \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(T^{i-1}(\omega))$$
allora $\widetilde{f}$ è Σ_T-misurabile.

3. *Se per ogni $\omega \in \Omega$ esiste*
$$\widehat{f}(\omega) := \lim_{n\to+\infty} f(T^n(\omega))$$
allora $\widehat{f}$ è Σ_T-misurabile.

Esercizio 37 *Sia $(\Omega, \mathcal{F})$ uno spazio misurabile e $T : \Omega \to \Omega$. Sia $\Sigma_T := \{A \in \mathcal{F} : T^{-1}(A) = A\}$ ed $f : \Omega \to X$ una funzione misurabile dove (X, τ) è uno spazio misurabile (si pensi pure a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Mostrare che*

1.
$$\begin{aligned} T^{-1}(A) \subseteq H &\Longleftrightarrow T^{-1}(H^c) \supseteq A^c \Longleftrightarrow T(H) \subseteq A \\ T^{-1}(A) \subseteq A &\Longleftrightarrow T^{-1}(B) \supseteq B \Longleftrightarrow T(B) \subseteq B \end{aligned}$$

2. *In generale*
$$\begin{aligned} T(H) \supseteq A &\not\Longrightarrow T^{-1}(A) \subseteq H \\ T(H) \supseteq A &\not\Longleftarrow T^{-1}(A) \subseteq H; \end{aligned}$$
se T è iniettiva su $T^{-1}(A)$ allora vale la prima, mentre se T è suriettiva su A allora vale la seconda.

3.
$$T^{-1}(H) = A \Longleftrightarrow \begin{cases} T(A) \subseteq H \\ T(A^c) \subseteq H^c \end{cases} \Longleftrightarrow T^{-1}(H^c) = A^c$$
$$T^{-1}(A) = A \Longleftrightarrow \begin{cases} T(B) \subseteq B \\ T(A) \subseteq A \end{cases} \Longleftrightarrow T^{-1}(B) = B$$

4. Σ_T è una σ-algebra;

5. Se $f \circ T = f$ allora f è σ_T-misurabile; se τ contiene i singoletti allora vale il viceversa.

6. Dato $A \in \mathcal{F}$ allora $A \in \Sigma_T$ se e solo se $\mathbb{1}_A \circ T = \mathbb{1}_A$.

SOLUZIONI

Soluzione esercizio 1.

1. Sia X_i la v.a. che descrive lo spazio percorso nel giorno i. Sappiamo che $\mathbb{E}(X_i) = 600$ km. e $\mathrm{var}(X_i) = 50^2\mathrm{k}m^2$. Allora lo spazio percorso in 340 giorni è rappresentato dalla v.a. $S = \sum_{i=1}^{340} X_i$.
   La media di questa variabile è $\mathbb{E}(S) = \sum_{i=1}^{340} \mathbb{E}(X_i) = 340 \cdot 600 = 204.000$ km.

2. Bisogna calcolare quanto deve valere n affinchè risulti

$$\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq 7000) \geq 0.9.$$

   Dal TCL sappiamo che $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$, dunque $\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq 7000) = \mathbb{P}(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma \cdot \sqrt{n}} \geq \frac{7000 - n \cdot 600}{50 \cdot \sqrt{n}}) = \mathbb{P}(Z \geq \frac{7000 - n \cdot 600}{50 \cdot \sqrt{n}}) = 1 - \phi(\frac{7000 - n \cdot 600}{50 \cdot \sqrt{n}}) \geq 0.9$ da cui deve essere $\phi(\frac{7000 - n \cdot 600}{50 \cdot \sqrt{n}}) \leq 1 - 0.9 = 0.1$ e quindi $\frac{7000 - n \cdot 600}{50 \cdot \sqrt{n}} \leq z_{0.1} = -1.28$. Si ottiene così la disequazione $64\sqrt{n} - n600 + 7000 \leq 0$. Ponendo $x = \sqrt{n}$ si ottiene una disequazione di II grado le cui soluzioni sono 3.47 e -3.36. Poichè siamo interessati solo alla radice positiva, otteniamo $x \geq 3.47$ ossia $n \geq 12.04$. Dunque il titolare deve dichiarare 13 giorni di attesa.

Soluzione esercizio 2.
Sia T_i la v.a. che misura il tempo di lavorazione dell'i-esimo pezzo. Per ipotesi le T_i sono i.i.d., con $\mathbb{E}[T_i] = 2'$, e $\mathrm{var}[T_i] = (0,3')^2$.

1. Si ha:

$$\mathbb{P}\left[T_1 + \cdots + T_{150} < 310'\right] = \mathbb{P}\left[\frac{T_1 + \cdots + T_{150} - 300'}{0,3'\sqrt{150}} < \frac{10'}{0,3'\sqrt{150}}\right] \simeq$$

$$\Phi(2,722) \simeq 0,99676.$$

2. Ricordando che $1'55'' = 115''$, $2'10'' = 130''$ e $0,3' = 18''$ si ha:

$$\mathbb{P}(115'' < \overline{T}_{100} < 130'') = \mathbb{P}(\frac{(115'' - 120'') \times 10}{18''} < Z < \frac{(130'' - 120'') \times 10}{18''}) \simeq$$

$$\simeq \Phi(5,556) - \Phi(-2,777) \simeq 1 - (1 - \Phi(2,777)) \simeq 0,99726.$$

3. Si deve imporre

$$0,95 \leq \mathbb{P}(|\overline{T}_n - 120''| \leq 4'') = \mathbb{P}(\frac{|\overline{T}_n - 120''|\sqrt{n}}{18''} \leq \frac{4''\sqrt{n}}{18''}) = 2\Phi(\frac{2}{9}\sqrt{n}) - 1$$

da cui si deduce

$$\frac{2}{9}\sqrt{n} \geq z_{0,975} = 1,96 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{n} \geq 8,82 \quad \Rightarrow \quad n \geq 78.$$

Soluzione esercizio 3.

Fissato un campione di n auto, indicato con X_i la v.a. che descrive il peso della i-sima auto ($i = 1, ..., n$) dal testo si sa che $\mathbb{E}(X_i) = 1$ e $\text{var}(X_i) = (0.1)^2 = 0.01$. Supponiamo che le X_i siano v.a. indipendenti e identicamente distribuite.
Il peso totale delle auto che transitano sul ponte è descritto dalla v.a. $S_n = X_1 + ... + X_n$, quindi si tratta di determinare il valore di n per cui risulta $\mathbb{P}(S_n > 200) > 0.1$. Per il TCL si ha che $S_n \sim \mathcal{N}(1 \cdot n, 0.01 \cdot n)$, quindi

$$\mathbb{P}(S_n > 200) = \mathbb{P}(\frac{S_n - n}{0.1\sqrt{n}} > \frac{200 - n}{0.1\sqrt{n}}) =$$

$$= \mathbb{P}(Z > \frac{200 - n}{0.1\sqrt{n}}) > 0.1$$

con $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Dunque deve essere $1 - \Phi(\frac{200-n}{0.1\sqrt{n}}) > 0.1$, cioè $\Phi(\frac{200-n}{0.1\sqrt{n}}) < 0.9$, da cui si deduce che $\frac{200-n}{0.1\sqrt{n}} < z_{0.9}$ dove $z_{0.9}$ denota il quantile di ordine 0.9 della Normale standard.
Consultando le tavole della normale si trova $z_{0.9} = 1.28$ e sostituendo si ottiene quindi la disequazione $\frac{200-n}{0.1\sqrt{n}} < 1.28$. Risolvendo la disequazione si trova il valore minimo di n, ossia $n \geq 199$.

Soluzione esercizio 4.

Sia X_i la i-sima misurazione della distanza. Dal testo è noto che le var. X_i sono iid con media d e var $= 4$. La distanza della stella è misurata effettuando n osservazioni X_i e calcolando poi la media campionaria $\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$.
Il problema consiste dunque nel determinare n in modo tale che $\mathbb{P}(|\bar{X}_n - d| < 0.5) = 0.95$. Dal TCL si sa che $\frac{\sum_{i=1}^n X_i - nd}{\sigma\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, quindi si può scrivere:

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - d| < 0.5) = \mathbb{P}(|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - d| < 0.5) = \mathbb{P}(|\frac{\sum_{i=1}^n X_i - nd}{n}| < 0.5) =$$

$$= \mathbb{P}(|\frac{\sum_{i=1}^n X_i - nd}{n}| \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sigma} < \frac{\sqrt{n}}{2 \cdot \sigma}) =$$

$$= \mathbb{P}(|\frac{\sum_{i=1}^n X_i - nd}{\sqrt{n} \cdot \sigma}| < \frac{\sqrt{n}}{2 \cdot \sigma}) =$$

$$\mathbb{P}(|Z| < \frac{\sqrt{n}}{2 \cdot 2}) = 0.95$$

con $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Ma

$$\mathbb{P}(|Z| < \frac{\sqrt{n}}{2 \cdot 2}) = \Phi(\frac{\sqrt{n}}{4}) - \Phi(-\frac{\sqrt{n}}{4}) =$$

$$= \Phi(\frac{\sqrt{n}}{4}) - (1 - \Phi(\frac{\sqrt{n}}{4})) = 2\Phi(\frac{\sqrt{n}}{4}) - 1 = 0.95$$

da cui segue

$$\Phi(\frac{\sqrt{n}}{4}) = 0.975 \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{4} = 1.96 \Rightarrow n = 62$$

Soluzione esercizio 5.

1. Sia X_{50} la v.a. che indica il numero di canestri su 50 tiri, allora $X_{50} \sim Bin(50, 0.55)$.
   Poiché $np = 27.5 > 5$ e $n(1-p) = 22.5 > 5$, possiamo utilizzare l'approssimazione normale, ossia $X_{50} \simeq \mathcal{N}(27.5, 12.375)$. Dunque

   $$\mathbb{P}(X_{50} \leq 25) = \mathbb{P}(\frac{X_{50} - 27.5}{\sqrt{12.375}} < \frac{25.5 - 27.5}{\sqrt{12.375}}) \simeq \Phi(-0.57) =$$

   $$= 1 - \Phi(0.57) = 0.28$$

2. Detta X_n la v.a. che indica il numero di canestri su n tiri, si chiede di determinare n in modo che risulti $\mathbb{P}(X_n \geq 50) \geq 0.9$. Utilizzando l'approssimazione normale si ha $X_n \sim Bin(n, 0.55) \simeq \mathcal{N}(n{\cdot}0.55, n{\cdot}0.2475)$. Dunque

   $$0.9 \leq \mathbb{P}(X_n \geq 50) = \mathbb{P}(X_n > 49.5) = \mathbb{P}(\frac{X_n - n \cdot 0.55}{\sqrt{n \cdot 0.2475}} > \frac{49.5 - n \cdot 0.55}{\sqrt{n \cdot 0.2475}}) \simeq$$

   $$\simeq 1 - \Phi(\frac{49.5 - n \cdot 0.55}{\sqrt{n \cdot 0.2475}}),$$

   da cui segue

   $$\Phi(\frac{49.5 - n \cdot 0.55}{\sqrt{n \cdot 0.2475}}) \leq 0.1 \Leftrightarrow \frac{49.5 - n \cdot 0.55}{\sqrt{n \cdot 0.2475}} \leq z_{0.1} = -1.2816$$

   Risolvendo la disequazione si ottiene $n \geq 101.7$ ossia $n \geq 102$.

Soluzione esercizio 6.

1. Poichè $X \sim B(300, \frac{1}{36})$, si ha che $\mathbb{E}(X) = \frac{300}{36} = 8.33$ e $\text{var}(X) = \frac{300}{36} \cdot \frac{35}{36} = \frac{875}{108}$

2. Utilizzando l'approssimazione della binomiale con la normale si ottiene

$$\mathbb{P}(X > 10) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 10) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 10.5) \simeq$$
$$\simeq 1 - \mathbb{P}(N \leq 10.5) \simeq 1 - \mathbb{P}(N \leq \frac{10.5 - 8.33}{\sqrt{8.10}} =$$
$$= 1 - \mathbb{P}(Z \leq 0.76) \simeq 1 - \phi(0.76) \simeq 0.22363$$

dove $N \simeq \mathcal{N}(8.33, 8.10)$.

3. Occorre determinare n tale che $\mathbb{P}(X > 10) > 0.5$. Utilizzando nuovamente l'approssimazione normale si ha

$$\mathbb{P}(X > 10) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 10) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 10.5) =$$
$$= 1 - \mathbb{P}(\frac{X - \frac{n}{36}}{\sqrt{\frac{n35}{36^2}}} \leq \frac{10.5 - \frac{n}{36}}{\sqrt{\frac{n35}{36^2}}}) > 0.5$$
$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(Z \leq \frac{378 - n}{\sqrt{35n}}) < 0.5 \Leftrightarrow \phi(\frac{378 - n}{\sqrt{35n}}) < 0.5$$
$$\frac{378 - n}{\sqrt{35n}} < z_{0.5} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{378 - n}{\sqrt{35n}} < 0 \Leftrightarrow n > 378$$

Soluzione esercizio 7.
Indicata con X la variabile aleatoria che conta il numero di componenti funzionanti su 100, allora X ha legge binomiale di parametri $p = 0.2$ e $n = 100$. Pertanto,

1. $\mathbb{E}(X) = 100 \cdot 0.2 = 20$ e $var(X) = 100 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 16$.

2.

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{P}\{\text{"il sistema funziona"}\} \\
&= \mathbb{P}\{\text{almeno 30 componenti su 100 funzionano}\} = \mathbb{P}(X \geq 30) \\
&= 1 - \mathbb{P}\{\text{al più 29 componenti su 100 funzionano}\} \\
&= 1 - \mathbb{P}(X \leq 29) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 29 + 0.5) \\
&\simeq 1 - \Phi\left(\frac{29.5 - 20}{4}\right) = 1 - \Phi(2.375) \simeq 1 - 0.99111 = 0.0089
\end{aligned}$$

dove $N \simeq N(0, 1)$

3. $Y = 100 - X$ rappresenta il numero di componenti non funzionanti su 30; Y ha legge binomiale di parametri $q = 1 - 0.2 = 0.8$ e $n = 100$. Segue che il numero medio di componenti NON funzionanti è $100 \cdot 0.8 = 80$ con $var(Y) = 16$.
   Come prima, stimiamo la probabilità cercata usando l'approssimazione normale per la legge binomiale e la "correzione di continuità", che migliora l'approssimazione per variabili aleatorie a valori intere. Pertanto,

$$\mathbb{P}(72 \leq Y \leq 88) = \mathbb{P}(72 - 0.5 \leq Y \leq 88 + 0.5) \simeq \mathbb{P}(71.5 \leq N \leq 88.5)$$

   dove $N \simeq \mathcal{N}(100 \cdot 0.8, 100 \cdot 0.8 \cdot 0.2) = \mathcal{N}(80, 16)$

$$= \Phi(\frac{88.5 - 80}{4}) - \Phi(\frac{71.5 - 80}{4}) = \Phi(2.125) - \Phi(-2.125) = 2\Phi(2.125) - 1$$

$$\simeq 0.9664134.$$

Soluzione esercizio 8.
Sia X la v.a. che indica il numero di molecole di sodio in 10 cl. di acqua, $X \sim P(10000)$. Si deve calcolare $\mathbb{P}(X > 10000) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 10000)$. Approssimando con la Normale si ha

$$1 - \mathbb{P}(X \leq 10000) = 1 - \mathbb{P}(\frac{X - 10000}{\sqrt{10000}} \leq \frac{10000 - 10000 + 0.5}{\sqrt{10000}}) =$$

$$= 1 - \mathbb{P}(Z \leq 0.005) = 0.498.$$

Si osservi che il calcolo fatto utilizzando direttamente la Poisson restituirebbe un valore approssimato 0.4977.

Soluzione esercizio 9.
Sia X la v.a. che indica il numero di righe di una inserzione ed Y la v.a. che ne indica il costo. Scrivendo Y in centesimi, si ha che $Y = 60$ se $X \leq 8$, $Y = 100$ se $8 < X \leq 12$, $Y = 125$ se $12 < X \leq 16$, $Y = 155$ se $X > 16$. Allora $\mathbb{E}(Y) = 60 \cdot \mathbb{P}(X \leq 8) + 100 \cdot \mathbb{P}(8 < X \leq 12) + 125 \cdot \mathbb{P}(12 < X \leq 16) + 155\mathbb{P}(X > 16)$. Utilizzando l'approssimazione normale di $X \sim \mathcal{P}(12)$ con la normale $\mathcal{N}(12, 12)$ possiamo calcolare le probabilità ad essa relative. Si ha quindi:

$$\mathbb{P}(X \leq 8) = \mathbb{P}(1 \leq X \leq 8) = \mathbb{P}(1 - 0.5 \leq X \leq 8 + 0.5)$$

$$\simeq \mathbb{P}(\frac{0.5 - 12}{\sqrt{12}} \leq Z \leq \frac{8.5 - 12}{\sqrt{12}}) == \Phi(\frac{8.5 - 12}{\sqrt{12}}) - \Phi(\frac{0.5 - 12}{\sqrt{12}})$$

$$= \Phi(-1.0104) - \Phi(-2.9641) = 0.156248 - 0.001538 \simeq 0.155.$$

Analogamente si calcolano

$$\mathbb{P}(9 \leq X \leq 12) \simeq \mathbb{P}(\frac{8.5 - 12}{\sqrt{12}} \leq Z \leq \frac{12.5 - 12}{\sqrt{12}}) =$$

$$= \Phi(\frac{12.5-12}{\sqrt{12}}) - \Phi(\frac{8.5-12}{\sqrt{12}}) \simeq 0.401$$

e

$$\mathbb{P}(13 \leq X \leq 16) \simeq 0.345.$$

Si ha poi che $\mathbb{P}(X > 16) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 15) \simeq 1 - \Phi(\frac{15.5-12}{\sqrt{12}}) = 1 - \Phi(1.010) = 0.156$.

Sostituendo si ottiene $\mathbb{E}(Y) = 60 \cdot 0.155 + 100 \cdot 0.401 + 125 \cdot 0.345 + 155 \cdot 0.156 = 665.4050$ centesimi di euro

Soluzione esercizio 10.
La X è una var. Binomiale di parametri $n = 4000$ e $p = \frac{1}{1000} = 0,001$

1. In approssimazione Normale, risulta $X \simeq Y \sim \mathcal{N}(np, np(1-p))$, cioè $Y \simeq \mathcal{N}(4, 3.996)$. Dunque $\mathbb{P}(X \geq 1) = \mathbb{P}(X > 0) \simeq \mathbb{P}(Y > 0.5) = \mathbb{P}(\frac{Y-4}{\sqrt{3.996}} > \frac{0.5-4}{\sqrt{3.996}}) = \Phi(1.75) = 0.95994$

2. In approssimazione con Poisson, risulta $X \simeq W \sim \mathcal{P}(np)$, cioè $W \sim \mathcal{P}(4)$. Dunque $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) \simeq 1 - \mathbb{P}(W = 0) = 1 - e^{-4} = 0.9816$

3. La migliore approssimazione è la seconda perché, mentre non sono soddisfatte le condizioni per una approssimazione normale ($np = 4 < 5$), sono soddisfatte quelle per approssimare con Poisson ($np = 4 \leq 10, n = 4000 > 50$). Infatti, il numero esatto calcolato con la Binomiale è $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - (0.999)^{4000} = 0.9817$.

Soluzione esercizio 11.

1. Si osservi che, se $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n$,
$$F_{(Y_{i_1},\dots,Y_{i_m})}(t_1,\dots,t_m) = F_{(Y_{i_1},\dots,Y_{i_m})}(s_1,\dots,s_m)$$
dove
$$s_i := \min_{t_j : j \geq i} \ \forall i = 1,2,\dots,n)$$
pertanto possiamo limitarci a considerare solo il caso $t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n$. Evidentemente, definendo $t_0 := -\infty$,
$$Y_1 \leq t_1, Y_2 \leq t_2, \dots, Y_n \leq t_n$$
$$\Updownarrow$$
$$\textstyle\sum_{i=1}^k \mathrm{card}\{j : X_j \in (t_{i-1}, t_i]\} \geq k, \ \forall k = 1,2,\dots,n.$$
Se definiamo $m_i := \mathrm{card}\{j : X_j \in (t_{i-1}, t_i]\}$ possiamo scomporre l'evento $\{Y_1 \leq t_1, Y_2 \leq t_2, \dots, Y_n \leq t_n\}$ distinguendo quali variabili assumono valore nell'intervallo $(-\infty, t_1]$, quali in $(t_1, t_2]$ ecc... La formula finale è
$$F_{(Y_1,\dots,Y_n)}(t_1,\dots,t_n)$$
$$= \sum_{\substack{m_1,\dots,m_n \\ \sum_{i=1}^k m_i \geq k,\, \forall k=1,\dots,n}} \binom{n}{m_1\, m_2\, \cdots\, m_n} \prod_{i=1}^n (F(t_i) - F(t_{i-1}))^{m_i}$$

dove $F(-\infty) := 0$ e

$$\binom{n}{m_1\, m_2\, \cdots\, m_n} := \frac{n!}{m_1! m_2! \cdots m_n!}.$$

2. Dal punto precedente, per ogni $t, s \in \mathbb{R}$,

$$F_{(Y_1,Y_2)}(t,s) = F(s)^n - (F(s) - F(\min(t,s)))^n.$$

Soluzione esercizio 12.
In generale se si considerano n variabili aleatorie i.i.d. $N_1, \dots, N_n$ a valori in $\mathbb{N}$, dal principio di inclusione-esclusione si ha

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(N_1 = x_1, \dots, N_n = x_n) \\
&\quad = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \sum_{1 \le r_1 < \cdots < r_i \le n} \mathbb{P}(N_h \le i_h, \forall h \notin \{r_1, \dots r_i\}, X_{r_j} \le i_{r_j} - 1, \forall j = 1, \dots, i) \\
&\quad + \mathbb{P}(X_1 \le i_1, \dots, X_n \le i_n).
\end{aligned}$$

Supponiamo che le v.a. aleatorie $N_1, \dots N_n$ rappresentino i risultati dei lanci. Sono sono indipendenti e tutte uniformemente distribuite su $\{1, 2, \dots, 6\}$. Allora $U = \min\{N_1, \dots, N_n\}$ e $W = \max\{N_1, \dots, N_n\}$.
Notiamo innanzitutto che $U, W \in \{1, 2, \dots, 6\}$ e $\mathbb{P}(U \le W) = 1$, da cui

$$F_{U,W}(i,j) = F_{U,W}(\min(i,j), j), \qquad \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

Quindi otteniamo per $i \le j$:

$$\begin{aligned}
F_{(U,W)}(i,j) &= F(j)^n - (F(j) - F(i))^n \\
&= \left(\frac{\min(6, \max(0,j))}{6}\right)^n - \left(\frac{\min(6, \max(0,j))}{6} - \frac{\min(6, \max(0,j))}{6}\right)^n
\end{aligned}$$

e quindi, se $i, j \in \{1, \dots, n\}$, considerando che $F(j) = j/6$ si ha

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U = i, W = j) &= F_{(U,W)}(i,j) - F_{(U,W)}(i-1,j) \\
&- (F_{(U,W)}(i,j-1) - F_{(U,W)}(i-1,j-1)) \\
&= F(j)^n - (F(j) - F(i))^n - F(j)^n + (F(j) - F(i-1))^n \\
&+ F(j-1)^n + (F(j-1) - F(i))^n + F(j-1)^n - (F(j-1) - F(i-1))^n \\
&= (F(j) - F(i-1))^n - (F(j) - F(i))^n \\
&+ (F(j-1) - F(i))^n - (F(j-1) - F(i-1))^n \\
&= \frac{1}{6^n}\Big(j^n - (j-1)^n - (j^n - (j-i-1)^n) \\
&- (j-1)^n + (j-i+1)^n + (j-1)^n\Big) \\
&= \frac{1}{6^n}\left((j-i+1)^n + (j-i-1)^n - 2(j-i)^n\right).
\end{aligned}$$

Nel caso particolare $n = 2$ si ha

$$\mathbb{P}(U = i, w = j) = \begin{cases} 1/18 & i, j \in \{1, \dots, 6\}, i < j \\ 1/36 & i, j \in \{1, \dots, 6\}, i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Soluzione esercizio 13.

1. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha che:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \leq x) &= \mathbb{P}(Y \leq x, Z = 1) + \mathbb{P}(Y \leq x, Z = -1) \\ &= \mathbb{P}(X \leq x, Z = 1) + \mathbb{P}(X \geq -x, Z = -1) \\ &= \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Z = 1) + \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Z = -1) \\ &= \mathbb{P}(X \leq x)1/2 + \mathbb{P}(X \leq x)1/2 = \mathbb{P}(X \leq x) \end{aligned}$$

   Nel terz'ultimo passaggio abbiamo utilizzato la proprietà di simmetria di X e l'indipendenza fra X e Z. Quindi $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Ovviamente, utilizzando l'indipendenza tra Y e Z,

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) &= \mathbb{E}(Y^2 \mathbb{1}_{Z=1}) - \mathbb{E}(Y^2 \mathbb{1}_{Z=-1}) \\ &\mathbb{E}(Y^2)(\mathbb{P}(Z = 1) - \mathbb{P}(Z = -1)) = 0. \end{aligned}$$

2. Notiamo che per la linearità del valore atteso $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y) = 0$, qualsiasi sia la legge congiunta del vettore. Se $X + Y$ fosse gaussiana, dovendo essere simmetrica, necessariamente avremmo che $\mathbb{P}(X + Y \leq 0) = \frac{1}{2}$. Calcoliamo nel nostro caso questa quantità:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X + Y \leq 0) &= \mathbb{P}(X + Y \leq 0, Z = 1) + \mathbb{P}(X + Y \leq 0, Z = -1) \\ &= \mathbb{P}(2X \leq 0) \cdot \frac{1}{2} + \mathbb{P}(0 \leq 0) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

   Nel terz'ultimo passaggio abbiamo usato l'ipotesi di indipendenza fra X e Z e la legge di Z. Abbiamo perciò mostrato che $X + Y$ non è gaussiana.

3. (X, Y) non può essere un vettore gaussiano altrimenti la somma delle sue componenti (essendo una particolare combinazione lineare delle componenti) sarebbe una v.a. gaussiana.

4. X e Y sono indipendenti per definizione mentre se $A \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ allora, utilizzando la simmetria della distribuzione di X,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(XY \in A, Y = \pm 1) &= \mathbb{P}(X \in \pm A, y = \pm 1) = \mathbb{P}(X \in \pm A)\mathbb{P}(Y = \pm 1) \\ &= \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y = \pm 1) = \mathbb{P}(XY \in A)\mathbb{P}(Y = \pm 1) \end{aligned}$$

pertanto la collezione è indipendente.

Tuttavia XY e X non sono indipendenti e nemmeno (X, XY) e Y. Infatti

$\mathbb{P}((X, XY) \in (-1,1)^2) = \mathbb{P}(X \in (-1,1)) \neq \mathbb{P}(X \in (-1,1))^2 = \mathbb{P}(X \in (-1,1))\mathbb{P}(XY \in (-1,1));$

ed inoltre

$\mathbb{P}((X, XY) \in [0,+\infty)^2), Y = -1) = \mathbb{P}(X \in [0,+\infty), -X \in [0,+\infty), Y = -1) = 0 \neq 1/8 = \mathbb{P}((X, XY) \in [$

Ovviamente (X, X) e Y sono indipendenti in quanto

$\mathbb{P}((X,X) \in A \times B, Y \in C) = \mathbb{P}(X \in A \cap B, y \in C) = \mathbb{P}(X \in A \cap B)\mathbb{P}(y \in C) = \mathbb{P}((X,X) \in A \times B)\mathbb{P}(Y \in C$

Osservazione: si osservi che questo è un altro esempio di variabili gaussiane scorrelate non indipendenti.

Soluzione esercizio 14.

1. Ricordiamo che, per ogni legge μ
$$\mathbb{E}_\mu = \int_0^{+\infty} (1 - F_\mu(t))\mathrm{d}t - \int -\infty^0 F_\mu(t)\mathrm{d}t$$
pertanto, se entrambe le medie esistono allora
$$\mathbb{E}_\mu - \mathbb{E}_n u = \int_{-\infty}^{+\infty} (F_\nu(t) - F_\mu(t))\mathrm{d}t$$
pertanto $F_\mu \geq F_\nu$ implica immediatamente $E_\mu \leq \mathbb{E}_\nu$.

2. Viceversa sia x_0 tale che $F_\mu(x_0) > F_\nu(x_0)$ allora, per la continuità da destra esiste $\epsilon > 0$ tale che $F_\mu(x) > F_\nu(x)$ per ogni $x \in (x_0, x_0 + \epsilon)$ da cui, facilmente si ha $\mathbb{E}_\mu < \mathbb{E}_\nu$.

Soluzione esercizio 15.

1. Sia $X_i := \mathbb{1}_A(Z_i)$; allora $\{X_i\}_{i=1}^\infty$ è un processo di Bernoulli di parametro $p = \mu(A)$. Sappiamo quindi che la variabile N è distribuita come una geometrica di parametro p ed, essendo $p > 0$ si ha $\mathbb{P}(N < +\infty) = 1$ (oppure più facilmente si ha la medesima conclusione dal lemma di Borel-Cantelli).

2. Infine
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_T \in B) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_T \in B, T = i) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_i \in B, T = i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_i \in B, Z_i \in A,\end{aligned}$$
$$\sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A \cap B)(1 - \mu(A))^{i-1} = \mu(B \cap A)/\mu(A) = \mu(B|A).$$

Osservazione: si osservi che la variabile Z_N si può equivalentemente scrivere come $Z_T = \sum_{i=1}^{+\infty} Z_i \mathbb{1}_{T=i}$.

Soluzione esercizio 16.

Per studiare la convergenza in legge della successione applichiamo il Teorema di Lévy e mostriamo che la successione delle funzioni caratteristiche corrispondenti convergono puntualmente alla funzione caratteristica di una v.a.. Abbiamo che $\psi_{X_n}(t) \doteq \mathbb{E}e^{tX_n} = e^{(itb_n - \frac{\sigma_n^2 t^2}{2})}$. Per ogni $t \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty} e^{(itb_n - \frac{\sigma_n^2 t}{2})} = e^{(itb - \frac{\sigma^2 t^2}{2})}$$

Abbiamo utilizzato la continuità delle funzioni $x \to e^{itx}$ e $x \to e^{\frac{-x^2 t^2}{2}}$. Infine notiamo che la funzione $e^{(itb - \frac{\sigma^2 t^2}{2})}$ è la funzione caratteristica di una gaussiana $\mathcal{N}(b, \sigma^2)$ quindi possiamo concludere che la successione delle X_n converge in legge a $X \sim \mathcal{N}(b, \sigma^2)$.

Soluzione esercizio 17.

1. Si osservi che che se $X_1, \ldots, X_n$ sono v.a. gaussiane indipendenti risp.di legge $\mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$ allora il vettore

$$(X_1, \ldots, X_n)^T \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \cdots \\ \mu_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_n^2 \end{pmatrix}\right)$$

ed inoltre $\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2)$ (provare entrambe le affermazioni per induzione). Per induzione è facile provare che

$$V_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{X_i}{2^{n+1-i}},$$

pertanto $V_n \sim \mathcal{N}(0, \sum_{i=1}^{n+1} (\frac{1}{4})^i)$, cioè $V_n \sim \mathcal{N}(0, \frac{1-1/4^{n+1}}{3})$.

2. Utilizziamo il risultato dell'esercizio precedente. Dal momento che

$$\lim_{k\to+\infty} \sum_{i=1}^{k+1} (\frac{1}{4})^i = \sum_{i=1}^{+\infty} (\frac{1}{4})^i = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

abbiamo che la successione converge in legge a $V \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{3})$.

3. Le V_n non sono una famiglia di variabili indipendenti, già V_1 e V_0 non sono indipendenti. In generale abbiamo che: $cov(V_n, V_{n-1}) = \frac{1}{2}Cov(X_n, V_{n-1}) + \frac{1}{2}Var(V_{n-1}) \neq 0$, per ogni $n \geq 1$, quindi V_n e V_{n-1} non sono indipendenti.

Soluzione esercizio 18.

1. Una v.a. con legge $Beta(\alpha,\beta)$, ha come densità: $f(t) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} I_{(0,1)}(t)$. Quindi trattandosi di una densità di probabilità abbiamo che:
$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt \qquad \forall \alpha,\beta > 0$$
Ricordiamo inoltre che $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ per ogni $\alpha > 0$. Porremo in seguito $c_{\alpha,\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$, per ogni $\alpha,\beta > 0$. Ora calcoliamo la media e la varianza:
$$\mathbb{E}(X) = c_{\alpha,\beta}\int_0^1 t^{\alpha}(1-t)^{\beta-1}\,dt = \frac{c_{\alpha,\beta}}{c_{\alpha+1,\beta}} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$
e
$$\mathbb{E}(X^2) = c_{\alpha,\beta}\int_0^1 t^{\alpha+1}(1-t)^{\beta-1}\,dt = \frac{c_{\alpha,\beta}}{c_{\alpha+2,\beta}} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}$$
da cui
$$Var(X) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} - (\frac{\alpha}{\alpha+\beta})^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

2. Siano $X_n \sim Beta(na,nb)$, allora $\mathbb{E}(X_n) = \frac{na}{na+nb} = \frac{a}{a+b}$ e $Var(X_n) = \frac{ab}{(a+b)^2(na+nb+1)}$, applicando la disuguaglianza di Chebychev, otteniamo che per ogni $\varepsilon > 0$:
$$\mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| > \varepsilon) = \mathbb{P}(|X_n - \frac{a}{a+b}| > \varepsilon) \le \frac{Var(X_n)}{\varepsilon^2} = \frac{ab}{\varepsilon^2(a+b)^2(na+nb+1)}$$
Quindi, per ogni $\varepsilon > 0$:
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - \frac{a}{a+b}| > \varepsilon) = 0$$
Ovvero la successione delle X_n converge in probabilità ad una v.a. X, tale che $\mathbb{P}(X = \frac{a}{a+b}) = 1$.

Soluzione esercizio 19.

1. Ricordiamo che se $X_1 \sim Poisson(\lambda_1)$ e $X_2 \sim Poisson(\lambda_2)$ e sono indipendenti allora $X_1 + X_2 \sim Poisson(\lambda_1 + \lambda_2)$. Quindi $S \sim Poisson(400)$ e $\mathbb{E}(S) = Var(S) = 400$.

2. Possiamo applicare l'approssimazione normale ed otteniamo che:

$$\mathbb{P}(S \leq 390) = \mathbb{P}(\frac{S-400}{\sqrt{400}} \leq \frac{390+0.5-400}{\sqrt{400}}) = \Phi(-0.475) = 1-\Phi(0.475) = 1-0.6826 = 0.3174$$

dove Φ è la funzione di ripartizione della gaussiana standard.

3. $X \sim Poisson(256)$ allora X ha la stessa legge di $Y_1 + \dots Y_{256}$, con $Y_i \sim Poisson(1)$ indipendenti, quindi utlilizzando ancora l'approssimazione normale otteniamo che:

$$\mathbb{P}(X > 270) = 1-\mathbb{P}(X \leq 270) = 1-\mathbb{P}(\frac{X-256}{\sqrt{256}} \leq \frac{256+0.5-270}{\sqrt{256}}) = 1-\Phi(0.90625) \simeq 0.181412$$

4. Cerco $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ vale: $\mathbb{P}(X_1 + \dots X_n > 390) > 0.5$. So che:

$$\mathbb{P}(X_1 + \dots X_n > 390) = 1 - \mathbb{P}(X_1 + \dots X_n \leq 390) \simeq \Phi(\frac{390.5-4n}{\sqrt{4n}})$$

quindi $\mathbb{P}(X_1 + \dots X_n > 390) > 0.5$ sse $\frac{390.5-4n}{\sqrt{4n}} < z_{0.5} = 0$, ovvero per $n > 97.625$. Quindi $\bar{n} = 98$. Notate che il numero trovato è sufficientemente grande da legittimare l'approssimazione normale.

Soluzione esercizio 20.

1. Da un noto risultato di teoria della misura

$$\int_{X^{-1}(A)} f \circ X \mathrm{d}\mu = \int_A F \mathrm{d}\mu_X$$

nel senso che $f \circ X$ è μ-integrabile su $X^{-1}(A)$ se e solo se f è μ_X-integrabile su A ed i due integrali coincidono. Nel caso in cui $f \geq 0$ allora i due integrali evidentemente divergono entrambi o convergono entrambi.

Inoltre è noto che se $X := (X_1, X_2)$ e $\mu_X = \mu_{X_1} \times \mu_{X_2}$ allora per $|f|$ si applica il Teorema di Tonelli per cui $X_1 X_2$ è integrabile se e solo se lo sono X_1 ed X_2 e $\mathbb{E}(X_1 X_2) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)$.

Nel nostro caso quindi $X_1 X_2$ ammette valore atteso $\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) = 0$. E la varianza $Var(X_1 X_2) = \mathbb{E}(X_1^2)\mathbb{E}(X_2^2) = \sigma^4 < +\infty$.

2. Definisco $Y_i = X_{2i-1} X_{2i}$ per ogni $i \in \mathbb{N}^*$, è facile mostrare che la successione delle Y_i è formata da v.a. indipendenti ed equidistribuite. Grazie al punto 1. sappiamo che $\mathbb{E}|Y_i| < +\infty$ e $\mathbb{E}(Y_i) = 0$ per ogni $i \in \mathbb{N}^*$. Allora vale la legge forte dei grandi numeri e quindi:

$$\mathbb{P}(V_n = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n} \to 0) = 1$$

Ovvero all'aumentare di n ci aspettiamo di osservare valori sempre più vicino allo 0.

3. Vediamo che la successione converge in legge, ovvero se $\exists$ una v.a. Y tale che:
$$\mathbb{P}(V_n \leq x) \to \mathbb{P}(Y \leq x)$$
per ogni $x \in \mathbb{R}$ di continuità per la F_Y. Noto che $0 < Var(Y_i) < +\infty$ per ogni $i \in \mathbb{N}^*$. Posso quindi applicare il Teorema centrale del limite: per ogni $y \in \mathbb{R}$ abbiamo che:
$$\mathbb{P}(\frac{Y_1 + \dots Y_n}{\sqrt{n}\sigma^2} \leq y) \to \Phi(y)$$
Per ogni $x \in \mathbb{R}$ pongo $y = \frac{x}{\sigma^2}$, il limite sopra si riscrive come segue:
$$\mathbb{P}(\frac{Y_1 + \dots Y_n}{\sqrt{n}\sigma^2} \leq \frac{x}{\sigma^2}) \to \Phi(\frac{x}{\sigma^2})$$
Ovvero:
$$\mathbb{P}(\frac{Y_1 + \dots Y_n}{\sqrt{n}} \leq x) \to \mathbb{P}(\sigma^2 Z \leq x)$$
Quindi V_n converge in legge a $\sigma^2 Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^4)$.

4. Dalla legge forte dei grandi numeri
$$\frac{X_1^4 + \cdots + X_n^4}{n} \to \mathbb{E}(X_1^4) \qquad q.c.$$

Soluzione esercizio 21.

Dal momento che $\mathbb{E}(X_1) = \lambda < +\infty$ e la successione è formata da variabili aleatorie i.i.d, vale la legge forte dei grandi numeri. Quindi, dal momento che la convergenza quasi certa implica in particolare la convergenza in legge, abbiamo che:
$$\mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \leq x\right) \to I_{[\lambda, +\infty)}(x)$$
per ogni $x \neq \lambda$ (p.to di discontinuità della funzione $x \to I_{[\lambda,+\infty)}(x)$). Quindi se $\lambda \neq 1$ abbiamo che
$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \leq n) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \leq 1\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda > 1 \\ 1 & \text{se } \lambda < 1 \end{cases}$$
Resta il caso in cui $\lambda = 1$, per il quale non possiamo utilizzare la legge dei grandi numeri. Notiamo che in questo caso $\mathbb{E}(X_1) = Var(X_1) = 1$ e quindi possiamo applicare il Teorema centrale del limite. Abbiamo che:
$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \leq n) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0\right) = \mathbb{P}(0) = 1/2$$

Riassumendo:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_1+\cdots+X_n \le n) = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda > 1 \\ 1/2 & \text{se } \lambda = 1 \\ 1 & \text{se } \lambda < 1 \end{cases}$$

Soluzione esercizio 22.

1. Dalla legge forte dei grandi numeri si ha che, per ogni $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n X_i - n\mu\right| \ge n\epsilon\right) = 0$$

pertanto, essendo $\{\sum_{i=1}^n X_i - n\lambda < 0\} \subseteq \{|\sum_{i=1}^n X_i - n\mu| > (\mu-\lambda)n\}$, si ottiene

$$0 \le \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i < n\lambda\right) \le \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n X_i - n\mu\right| > (\mu-\lambda)n\right) = 0.$$

2. È del tutto analogo al caso (a).

3. Dal Teorema Centrale del Limite, se $\sigma^2 := \mathrm{Var}(X_i)$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le x\right) = \Phi(x).$$

Considerando che

$$\left\{\sum_{i=1}^n X_i - m\mu \le 0\right\} = \left\{\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le 0\right\}$$

si ha l'asserto.

4. Si osservi che

$$\exp(-n\mu)\sum_{=0}^{[\lambda n]} \frac{(n\mu)^i}{i!} = \mathbb{P}(Y_n \le n\lambda)$$

dove $Y_n \sim P(n\mu)$; ricordando che la somma di n variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione $P(\mu)$ ha distribuzione $P(n\mu)$ si ottiene il risultato cercato.

Soluzione esercizio 23.

Se $x \geq 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \leq x\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n \leq [nx])$$

$$= \lim_{n\to+\infty} (1 - \mathbb{P}(X_n > [nx])) = 1 - \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{[nx]} = 1 - e^{-\lambda x}$$

Se $x < 0$, allora:

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \leq x\right) = 0 \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}^*$$

Quindi $\{\frac{X_n}{n}\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge in legge ad una v.a. $X \sim esp(\lambda)$.

Soluzione esercizio 24.

Avete visto a lezione che se $X_n \sim \chi^2(n)$ allora esistono $Y_1, \dots, Y_n$ v.a. indipendenti tutte di legge $\Gamma(1/2, 1/2)$ tali che $X_n \sim Y_1 + \cdots + Y_n$, questo per ogni $n \in \mathbb{N}^*$. Quindi dal momento che la successione delle Y_n è formata da v.a. indipendenti identicamente distribuite e di momento primo finito, vale la legge forte dei grandi numeri e:

$$\mathbb{P}(\lim_{n\to+\infty} \frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n} = \mathbb{E}(Y_1) = 1) = 1$$

Ovvero la successione delle $\frac{Y_1+\cdots+Y_n}{n}$ converge quasi certamente, in probabilità ed in legge ad una v.a. concentrata in 1. Allora dal momento che $\frac{X_n}{n} \sim \frac{Y_1+\cdots+Y_n}{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}^*$, anche la successione delle $\frac{X_n}{n}$ converge in legge ad una v.a. concentrata in 1.

Soluzione esercizio 25.

Sia $\{X_n^x\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. di Bernoulli di parametro x definite su un qualsivoglia spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. In tal caso $S_n^x := \sum_{i=1}^n X_i^x \sim \text{Bin}(n, x)$ e pertanto

$$B_n(x) = \mathbb{E}\left[f(S_n^x/n)\right].$$

A questo punto presentiamo due soluzioni.
Soluzione 1. Utilizziamo la disuguaglianza di Chebichev.

Essendo f una funzione continua su un compatto è altresì uniformemente continua, pertanto scelto un certo $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni x, y tali che $|x - y| < \delta$ allora $|f(x) - f(y)| < \epsilon/2$. Si scelga $n \geq \frac{1}{\delta^2 \epsilon \|f\|_\infty}$ (dove

$\|f\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|)$ allora

$$\begin{aligned}
|f(x) - B_n(x)| &\leq \sum_{i=1}^{n} |f(x) - f(i/n)| \binom{i}{n} x^i (1-x)^{n-i} \\
&= \mathbb{E}[|f(S_n^x/n) - f(x)| \mathbb{1}_{\{|S_n^x/n - x| > \delta\}}] \\
&+ \mathbb{E}[|f(S_n^x/n) - f(x)| \mathbb{1}_{\{|S_n^x/n - x| \leq \delta\}}] \\
&\leq 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(|S_n^x/n - x| > \delta) + \frac{\epsilon}{2} \\
&\leq 2\|f\|_\infty \frac{\mathrm{var}(S_n^x/n)}{\delta^2} + \frac{\epsilon}{2} \leq 2\|f\|_\infty \frac{x(1-x)}{n\delta^2} + \frac{\epsilon}{2} \\
&\leq 2\|f\|_\infty \frac{1}{4n\delta^2} + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon
\end{aligned}$$

per ogni $x \in [0,1]$.

Soluzione 2. Utilizziamo la legge forte dei grandi numeri e il teorema di convergenza dominata uniforme.

Dalla legge forte dei grandi numeri si ha che $S_n^x/n \to x$ $\mathbb{P}$-q.c. se $x \to +\infty$ e quindi, dalla continuità di f, anche $f(S_n^x/n) \to f(x)$ se $x \to +\infty$. Inoltre $|S_n^x/n| \leq \|f\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ per ogni $x \in [0,1]$ da cui, a norma del Teorema di Convergenza Dominata Uniforme, se $n \to +\infty$

$$f(S_n^x/n) \to f(x) \text{ in } L^1([0,1])$$

da cui

$$B_n(x) \to f(x)$$

uniformemente in $x \in [0,1]$ se $n \to +\infty$.

Soluzione esercizio 26.

Soluzione esercizio 27.

Si osservi che

$$a_k = \mathbb{P}(S_k > k/2), \quad b_k = 1 - \mathbb{P}(S_k \neq k/2) = 1 - \mathbb{P}(S_k > k/2) - \mathbb{P}(S_k < k/2) = 1 - 2a_k.$$

Dal Teorema Centrale del Limite si ha che

$$\mathbb{P}(\frac{S_k - k/2}{\sqrt{n/4}} \leq 0) \to \phi(0) = \frac{1}{2}$$

da cui l'asserto.

Soluzione esercizio 28.

Si consideri uno spazio misurabile qualsiasi $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ (non necessariamente di probabilità) e funzioni misurabili al posto di variabili aleatorie.

Sia $M \in \mathcal{F}$ tale che $\mu(\Omega \backslash M) = 0$ e per ogni $\omega \in M$ si abbia $\lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$. Sia, al solito, $\mu_X(A) := \mu(X^{-1}(A))$. Sappiamo che

$$\mu(\limsup_n X_n^{-1}(A)) \geq \limsup_n \mu_{X_n}(A) \geq \liminf_n \mu_{X_n}(A) \geq \mu(\liminf_n X_n^{-1}(A))$$

dove $\limsup_n A_n := \cap_n \cup_{k\geq n} A_k$ e $\liminf_n A_n := \cup_n \cap_{k\geq n} A_k$. Tale catena di disuguaglianze è diretta conseguenza di

$$\mu(\limsup_n A_n) \geq \limsup_n \mu(A_n) \geq \liminf_n \mu(A_n) \geq \mu(\liminf_n A_n)$$

e della definizione di μ_{X_n}.

Si noti che se

$$\omega \in \liminf_n X_n^{-1}(A) \cap M$$

allora

$$X(\omega) = \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) \in \overline{A} := A \cup \partial A$$

ed inoltre se

$$\omega \in X^{-1}(A \setminus \partial A) \cap M$$

allora definitivamente $X_n(\omega) \in X_n^{-1}(A)$ o, equivalentemente,

$$\omega \in \liminf_n X_n^{-1}(A).$$

Essendo

$$\mu_X(\overline{A}) = \mu_X(A \setminus \partial A) + \mu_X(\partial A) = \mu_X(A \setminus \partial A) \equiv \mu_X(A),$$

allora $\mu_X(A) = \mu(\liminf_n X_n^{-1}(A))$.

D'altro canto se

$$\omega \in \limsup_n X_n^{-1}(A) \setminus \liminf_n X_n^{-1}(A)$$

allora, equivalentemente, esistono infiniti valori di n per cui $\omega \in X_n^{-1}(A)$ ed infiniti valori di n per cui $\omega \notin X_n^{-1}(A)$ pertanto

$$\omega \in M^c \cup \{\omega \in \Omega : \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) \in \partial A,$$

pertanto $\mu_X(\limsup_n X_n^{-1}(A) \setminus \liminf_n X_n^{-1}(A)) = 0$ da cui

$$\mu(\limsup_n X_n^{-1}(A)) = \mu_X(\liminf_n X_n^{-1}(A)) = \mu_X(A).$$

Quest'ultima relazione unitamente alle precedenti implica l'esistenza del $\lim_{n\to+\infty} \mu_{X_n}(A)$ e vale

$$\lim_{n\to+\infty} \mu_{X_n}(A) = \mu_X(A).$$

Soluzione esercizio 29.

1. Si osservi che
$$\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{x_n^i}{n^i}$$
pertanto, ricordando che $\|x^i\|\leq\|x\|^i$,
$$\begin{aligned}\left|\exp(x)-\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n\right| &\leq \sum_{i=0}^{i_0}\left|\frac{n!}{(n-i)!}-1\right|\frac{1}{n!}\frac{\|X_n^1-x^i\|}{i!}\\ &+\sum_{i>i_0}\left(\frac{\|x^i\|}{i!}+\frac{\|x^i\|}{i!}\right)\\ &\leq \epsilon_{i_0}(n)+\sum_{i>i_0}\left(\frac{M^i}{i!}+\frac{\|x\|^i}{i!}\right)\end{aligned}$$
dove
$$\epsilon_{i_0}(n):=\sum_{i=0}^{i_0}\left|\frac{n!}{(n-i)!}-1\right|\frac{1}{n!}\frac{\|X_n^1-x^i\|}{i!}$$
ed $M:=\sup_i\|x_i\|$.

Se $\epsilon>0$, poiché $\lim_{n\to}\sum_{i>n}\left(\frac{M^i}{i!}+\frac{\|x\|^i}{i!}\right)=0$ si scelga $i_0=i_0(\epsilon)$ in modo che
$$\sum_{i>i_0}\left(\frac{M^i}{i!}+\frac{\|x\|^i}{i!}\right)\leq\frac{\epsilon}{2}.$$
Inoltre poiché $\lim_{n\to+\infty}\epsilon_{i_0}(n)=0$ sia n_ϵ tale che $\epsilon_{i_0}(n)\leq\epsilon/2$ per ogni $n\geq n_\epsilon$. Infine si ha
$$\left|\exp(x)-\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n\right|\leq\epsilon,\qquad\forall n\geq n_\epsilon.$$

2. Ricordando che una funzione f è n-differenziabile in x_0 se e solo se esiste $\{a_i\}_{i=0}^n$ tali che $f(x)-\sum_{i=0}^n a_i\frac{(x-x_0)^i}{i!}=r_n(x)$ con r_n n-differenziabile ed $r_n(x)=o(\|x-x_0\|^n)$.

   Inoltre se X è una variabile aleatoria avente tutti i momenti fino all' ordine n allora la sua funzione caratteristica $\widehat{X}$ è differenziabile in 0.

   Pertanto
$$\widehat{\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)}(t)=\prod_{i=0}^{n}\widehat{X_{n,i}}(t),$$
ma
$$\begin{aligned}X_{n,i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)&=1-\frac{t^2}{2n}\sigma_n^2+o\left(\frac{t^2}{n}\right)\\ &=1+\frac{-t^2(\sigma_n^2/n+o(1))}{n}\end{aligned}$$

da cui

$$\widehat{\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)}(t) \to \exp\left(-\frac{t^2\sigma^2}{2}\right).$$

Dal Teorema di Lèvy si conclude l'asserto.

Soluzione esercizio 30.

1. Dal lemma di Borel-Cantelli

   $$\mathbb{P}(\limsup_n \{d(X_n, Y_n) > \epsilon\}) = 0, \qquad \mathbb{P} - q.c., \qquad \forall \epsilon > 0,$$

   da cui

   $$\lim_{n\to+\infty} d(X_n, Y_n) = 0. \qquad \mathbb{P} - q.c.$$

   La conclusione si raggiunge osservando che $|d(X_n, X) - d(X, Y_n)| \leq d(X_n, Y_n)$.

2. Dal Lemma di Borel-Cantelli

   $$\mathbb{P}(\limsup_n \mathbb{P}(|X_n| > \alpha_n)) = 1$$

   cioè, $\mathbb{P}$-q.c. si ha che definitivamente $|X_n| \leq \alpha_n$ pertanto si ha convergenza assoluta.

Soluzione esercizio 31.

1. Questo risultato rimane vero per qualsiasi spazio di misura finita. Si osservi che dal Teorema di Convergenza Monotona e dal Teorema di Fubini-Tonelli

   $$\begin{aligned}
   \int \|X\| \mathrm{d}\mathbb{P} &= \sum_{i\geq 0} \int_{\|X\|\in[r_i, r_{i+1})} \|X\| \mathrm{d}\mathbb{P} \leq M \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)\mathbb{P}(\|X\| \in [r_i, r_{i+1})) \\
   &= M \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(\|X\| \geq r_i) \\
   \int \|X\| \mathrm{d}\mathbb{P} &= \sum_{i\geq 0} \int_{\|X\|\in[r_i, r_{i+1})} \|X\| \mathrm{d}\mathbb{P} \geq m \sum_{i=0}^{\infty} i\mathbb{P}(\|X\| \in [r_i, r_{i+1})) \\
   &= m(\sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(\|X\| \geq r_i) - 1).
   \end{aligned}$$

2. Dal Lemma di Borel-Cantelli ed utilizzando il punto precedente, si ottiene la seguente sequenza di condizioni equivalenti

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\frac{|X_n|}{n^{1/\alpha}}\right) = 1 \\
&\forall \epsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(\limsup_n \left\{\left|\frac{|X_n|}{n^{1/\alpha}}\right| \geq \epsilon\right\}\right) = 0 \\
&\forall \epsilon > 0, \quad \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\limsup_n \left\{\left|\frac{|X_n|}{n^{1/\alpha}}\right| \geq \epsilon\right\}\right) < +\infty \\
&\sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\limsup_n \left\{\left|\frac{|X_1|}{n^{1/\alpha}}\right| \geq \epsilon\right\}\right) < +\infty \\
&\mathbb{E}\left(|X_1|^{\alpha}\right) < +\infty.
\end{aligned}$$

Soluzione esercizio 31.

1. Sia (X, d) completo e sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che

$$\sum_{i=0}^{+\infty} d(x_i, x_{i+1}) < +\infty,$$

allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste $n_0 = n_0(\epsilon)$ tale che

$$\sum_{i=n}^{+\infty} d(x_i, x_{i+1}) < \epsilon, \qquad \forall n \geq n_0.$$

Allora se $m > n \geq n_0$ si ha

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{i=n}^{m-1} d(x_i, x_{i+1}) < \epsilon$$

pertanto la successione è di Cauchy e quindi converge.

Viceversa, sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di Cauchy e sia $\{j_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita per ricorrenza da

$$\begin{aligned}
j_0 &:= 0 \\
j_{n+1} &:= \min\left\{n > j_n : \forall i, k \geq n, d(x_i, x_k) \leq \frac{1}{2^n}\right\}.
\end{aligned}$$

In tal caso se $y_i := x_{j_i}$, per $i \in \mathbb{N}$, allora

$$\sum_{i=0}^{+\infty} d(y_i, y_{i+1}) < \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^i} < +\infty,$$

pertanto esiste $x \in X$ tale che $d(x, y_i) \to 0$ se $i \to +\infty$. Sia $\epsilon > 0$ e sia i_0 tale che $2^{i_0 - 1} \geq 1/\epsilon$, allora se $n \geq n_{i_0}$ si ha, per la continuità della distanza,

$$d(x, y_{i_0}) = \lim_{j \to +\infty} d(y_j, y_{i_0}) \leq \frac{1}{2^{i_0}}$$

da cui

$$d(x, x_n) \leq d(x, y_{i_0}) + d(y_{i_0}, x_n) \leq \frac{1}{2^{i_0}} + \frac{1}{2^{i_0}} \leq \epsilon$$

pertanto $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x.

2. Dal Lemma di Borel-Cantelli si ha $\mathbb{P}(\limsup_n \{d(X_{n+1}, X_n) > \alpha_n\}) = 0$ pertanto $\mathbb{P}$-q.c. si ha che definitivamente $d(X_{n+1}, X_n) \leq \alpha_n$ per cui la successione è di Cauchy e quindi converge.

Soluzione esercizio 33.

(1) $\Longrightarrow$ (2).
X_n converge in probabilità a X se e solo se per ogni $\epsilon > 0$, $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(d(X_n, X) \geq \epsilon) = 0$ sia quindi n_i tale che $\mathbb{P}(d(X_n, X) \geq \epsilon_i) \leq \delta_i$ per ogni $n \geq n_i$.
(2) $\Longrightarrow$ (1).
Sia $\epsilon > 0$ e sia i_0 tale che $\epsilon_i < \epsilon$ per ogni $i \geq i_0$.
(1) $\Longrightarrow$ (3).
È facile mostrare che ρ è una distanza (diventa una norma quando d è una norma). Sia $\epsilon > 0$ e sia n_ϵ tale che $\mathbb{P}(d(X_n, X) > \epsilon/2) < \epsilon/2$ allora

$$\begin{aligned}\rho(X_n, X) &\geq \int_{d(X_n, X) \leq \epsilon} \frac{d(X_n, X)}{1 + d(X_n, X)} \mathrm{d}\mathbb{P} + \int_{d(X_n, X) < \epsilon} \frac{d(X_n, X)}{1 + d(X_n, X)} \mathrm{d}\mathbb{P} \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} \mathbb{P}(d(X_n, X) < \epsilon) + \mathbb{P}(d(X_n, X) \geq \epsilon) \leq \epsilon.\end{aligned}$$

(3) $\Longleftrightarrow$ (4)
È facile mostrare che ρ_1 è una distanza (diventa una norma quando d è una norma). Inoltre si vede che le due metriche sono equivalenti, i.e. , esiste $M \geq 1$ tale che

$$\frac{1}{M} \rho \leq \rho_1 \leq M \rho;$$

per mostrare quest'ultima catena di disuguaglianze si utilizza la seguente relazione

$$\frac{x}{1 + x} \leq \min(x, 1) \leq \frac{2x}{1 + x}, \qquad \forall x \geq 0.$$

(4) $\Longrightarrow$ (1)
Per ogni $\epsilon \in (0, 1)$ si ha che $d \geq \epsilon$ se e solo se $\min(d, 1) \geq \epsilon$, pertanto

$$\mathbb{P}(d(X_n, X) \geq \epsilon) \leq \frac{\rho_1(X_n, X)}{\epsilon} \to 0, \qquad n \to +\infty.$$

Soluzione esercizio 34.
Da esercizi già visti sappiamo che l'integrabilità di X è equivalente a $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(|X| \geq n) < +\infty$. Dalle ipotesi $\mathbb{P}(|X_n| \geq n) = \mathbb{P}(|X| \geq n)$ pertanto $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| \geq n) < +\infty$ da cui, a norma del lemma di Borel-Cantelli

$$\mathbb{P}(\limsup_n \{|X_n| \geq n\}) = 0$$

che è equivalente a $\mathbb{P}(\liminf_n \{|X_n| < n\}) = 1$ che è quanto affermato.

Soluzione esercizio 35.

1. Facilmente
$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{P}(A_n) - \frac{\mathbb{P}(A_n)}{1 - \mathbb{P}(A_n)} \mathbb{P}(A_n^c) = 0.$$

2. Dal lemma di Borel-Cantelli
$$\mathbb{P}(\liminf_n A_n) = 1$$
pertanto $\mathbb{P}$-q.c. esiste n_0 tale che per ogni $n \geq n_0$ si ha $\omega \in A_n$ e quindi $X_n = 1$ da cui, se $n \geq n_0$,
$$1 \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\infty} X_i \geq \frac{n - n_0}{n}$$
da cui l'asserto.

3. È un controesempio alle leggi dei grandi numeri debole e forte.

Soluzione esercizio 36.

1. È facile ed è lasciato al lettore.

2. Osserviamo che se $f, g : X \to Y$ sono due funzioni allora $f = g$ se e solo se $f^{-1}(A) = g^{-1}(A)$ per ogni $A \subseteq Y$ (o, equivalentemente, se e solo se $f^{-1}(\{y\}) = g^{-1}(\{y\})$ per ogni $y \in Y$).

   Inoltre, per definizione, $\widetilde{f}$ è $\Sigma_T - -\sigma(\tau)$ misurabile se e solo se $f^{-1}(\sigma(\tau)) \subseteq \Sigma_T$ o, equivalentemente, $f^{-1}(\tau) \subseteq \Sigma_T$.

   Quindi la misurabilità di $\widetilde{f}$ equivale a mostrare che per ogni $A \in \tau$ si ha che $T^{-1}(\widetilde{f}^{-1}(A)) = \widetilde{f}^{-1}(A)$ il che è vero se mostriamo che $\widetilde{f} \circ T = \widetilde{f}$ (questa condizione, sempre sufficiente, è altresì necessaria se la σ-algebra $\sigma(\tau)$ contiene i singoletti). Ma questo segue immediatamente da
$$\widetilde{f}(T(\omega)) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(T^{i-1}(T(\omega))) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} f(T^{i-1}(\omega)) = \widetilde{f}(\omega).$$

3. Similmente al caso precedente

$$\widehat{f}(T(\omega)) = \lim_{n \to +\infty} f(T^n(T(\omega))) = \lim_{n \to +\infty} f(T^{n+1}(\omega)) = \widehat{f}(\omega).$$

Osservazione Si osservi che mostrare che $f \circ T = f$ equivale a mostrare che $f^{-1}(A) \subset \Sigma_T$ per ogni $A \subset X$, pertanto la misurabilità di f rispetto ad una σ-algebra che contiene i singoletti è equivalente alla misurabilità di f rispetto ad ogni σ-algebra che contiene i singoletti (ovviamente solo nel caso in cui Σ_T sia definita come nell'esercizio).

Soluzione esercizio 37.
I primi punti sono facili. La soluzione degli ultimi punti è del tutto analoga ad una parte della soluzione dell'esercizio 36.