II prova in itinere
Corso di calcolo delle probabilità
Ingegneria dell'Automazione

Prof. L. Ladelli

1.7.2004

Nome:

Cognome:

Matricola:

1 Domande

1. Enunciare e dimostrare la legge debole dei Grandi numeri.
2. Enunciare il Teorema Centrale del Limite e fornire un esempio di sua applicazione.
3. Definizione di media e varianza di variabili aleatorie e loro principali proprietà.

2 Esercizi

Esercizio 1 *Sia X una variabile aleatoria assolutamente continua con densità*

$$f_X(x) = \frac{2x}{3} e^{-\frac{x^2}{3}} I_{(0,+\infty)}(x).$$

1. *Determinare la densità di X^2 e riconoscerla.*
2. *Determinare $\mathbb{E}(\frac{1}{X})$.*

Soluzione

1. Utilizzando il fatto che $\mathbb{P}(X \in (0, +\infty)) = 1$ e che $g(x) := x^2$ è un omeomorfismo (a noi basta C^1 con inversa C^1) su $(0, +\infty)$ si ha che, applicando la nota formula per la densità di una funzione di variabile aleatoria continua,

$$f_{X^2}(t) := \frac{1}{3} \exp(-t/3) I_{(0,+\infty)}(t)$$

(allo stesso risultato si potrebbe arrivare studiando la funzione di ripartizione $F_{X^2}(t) := \mathbb{P}(X^2 \leq t)$). La variabile X^2 ha pertanto legge esponenziale di parametro $1/3$.

2. Il valore medio della variabile $1/X$ si ricava immediatamente dalla relazione

$$\mathbb{E}(1/X) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t} f_X(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2t}{3t} \exp(-t^2/3)\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{3\pi}}{\sqrt{3\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{2}{3} \exp(-t^2/3)\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{3}}$$

poichè $2\frac{1}{\sqrt{3\pi}} \int_0^{+\infty} \exp(-t^2/3)\mathrm{d}t = 1$ essendo uguale all'integrale su tutto $\mathbb{R}$ di una densità gaussiana a media nulla e varianza $3/2$.

∎

Esercizio 2 *Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti con densità (discreta) uniforme negli insiemi, rispettivamente $\{-1, 0, 1\}$ e $\{-2, 0, 2\}$.*

1. *Calcolare la densità del vettore* $\min(X, Y), X)$.
2. *Calcolare la densità marginale di* $\min(X, Y)$.
3. *Le variabili aleatorie* $\min(X, Y)$ *e* X *sono indipendenti?*
4. *Calcolare* $\mathbb{P}(\min(X, Y) = X)$.

Soluzione

1. La tabella della densità congiunta del vettore è data da

$\mathbb{P}(\min(X,Y) = i, X = j)$	$j = -1$	$j = 0$	$j = 1$
$i = -2$	$1/9$	$1/9$	$1/9$
$i = -1$	$2/9$	0	0
$i = 0$	0	$2/9$	$1/9$
$i = 1$	0	0	$1/9$

2. Sommando lungo le righe si ottiene la marginale

$$\mathbb{P}(\min(X,Y) = i) = \begin{cases} 1/3 & i = -2 \\ 2/9 & i = -1 \\ 1/3 & i = 0 \\ 1/9 & i = 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

3. Poichè per due variabili discrete indipendenti se la densità congiunta si annulla in (i, j) allora deve essere nulla in (i, r) ed (r, j) per ogni valore di r, si ha che, guardando la tabella fornita al primo punto, le due variabili non sono indipendenti: per esempio $\mathbb{P}(\min(X, Y) = 0, X = -1) = 0 \neq \mathbb{P}(\min(X, Y) = 0)\mathbb{P}(X = -1) = 1/9$.

4. Si osservi che $\mathbb{P}(\min(X,Y)=X)=\sum_{i\in S}\mathbb{P}(\min(X,Y)=i, X=i)$ dove S è l'intersezione dei range di $\min(X,Y)$ e X (cioè l'insieme dei valori assunti comuni): in questo caso $S=\{-1,0,1\}$. In definitiva $\mathbb{P}(\min(X,Y)=X)=5/9$.

▮

Esercizio 3 *Si consideri un vettore aleatorio gaussiano* $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ *di media* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *e matrice di covarianza* $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. *Calcolare la densità congiunta di X e $X-Y$. Le variabili X e $X-Y$ sono indipendenti?*
2. *Calcolare la matrice di covarianza del vettore* $\begin{pmatrix} X \\ X+aY \end{pmatrix}$ *al variare di* $a\in\mathbb{R}$.
3. *Per quali valori di $a\in\mathbb{R}$ le variabili aleatorie X e $X+aY$ sono indipendenti?*

Soluzione

1. $$\begin{pmatrix} X \\ X-Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

   Quindi $\begin{pmatrix} X \\ X-Y \end{pmatrix}$ è un vettore aleatorio gaussiano poichè si ottiene mediante una trasformazione affine (con matrice non singolare) di un vettore aleatorio gaussiano. Il vettore delle medie è $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e la matrice di covarianza è $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Il vettore $(X, X+aY)$ è una trasformazione affine di un vettore con vettore delle medie nullo e matrice di covarianza nota; essendo la trasformazione lineare si ha che la media del nuovo vettore è ancora nulla e la matrice di covarianza si ottiene come

   $$A_a C A_a^t = \begin{pmatrix} 2 & 2+a \\ 2+a & 2+2a+a^2 \end{pmatrix}$$

   dove

   $$A_a := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. La matrice della trasformazione lineare è singolare (i.e. $\det(A_a) = 0$) se e solo se $a = 0$; in tal caso si vede immediatamente che le coordinate non sono variabili indipendenti. L'indipendenza, nel caso di un vettore gaussiano, è equivalente alla coviarianza, pertanto se $a \neq 0$ le coordinate sono variabili indipendenti se e solo se $2 + a = 0$ cioè $a = -2$.

$\blacksquare$

Esercizio 4 *Una facoltà di Medicina riceve domande di ammissione per 130 posti per i corsi del primo anno. Si sa dall'esperienza degli anni passati che la probabilità che uno studente accettato si iscriva effettivamente al corso di laurea è 0.6. La facoltà quindi accetta 200 domande per i 130 posti. Supponendo i comportamenti degli individui indipendenti*

1. *Determinare la densità della variabile aleatoria X che indica il numero degli individui tra i 200 accettati che effettivamente si iscrivono.*
2. *Calcolare in modo approssimato la probabilità che con questo modo di procedere almeno uno studente (tra quelli che effettivamente si iscrivono) rimanga senza posto.*

Suggerimento: *osservare che la variabile X può essere scritta come somma di variabili i.i.d.*

SOLUZIONE

1. Evidentemente la variabile X ha legge binomiale di parametri 200 e 0.6.
2. Si ha facilmente $\mathbb{E}(X) = 0.6 \cdot 200 = 120$ e $\mathrm{var}(X) = 200 \cdot 0.6 \cdot 0.4 = 48$. Dal teorema centrale del limite

$$\frac{X - 120}{\sqrt{48}} \approx Y \sim \mathcal{N}(0,1)$$

pertanto, utilizzando la correzione di continuità,

$$\mathbb{P}(X > 130) = \mathbb{P}\left(\frac{X - 120}{\sqrt{48}} > \frac{130.5 - 120}{\sqrt{48}}\right) \approx 1 - \phi(10.5/\sqrt{48}) \approx 0.0648.$$

Senza la correzione di continuità si avrebbe

$$\mathbb{P}(X > 130) = \mathbb{P}\left(\frac{X - 120}{\sqrt{48}} > \frac{130 - 120}{\sqrt{48}}\right) \approx 1 - \phi(10/\sqrt{48}) \approx 0.0745.$$

$\blacksquare$

Esercizio 5 ** Sia (X, Y) un vettore aleatorio con densità uniforme sul quadrato di vertici $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$.*

1. *Determinare le densità marginali di X e di Y.*

2. *X e Y sono indipendenti?*

3. *Calcolare la media e la varianza di X e di Y.*

4. *Calcolare la covarianza di X e Y.*

SOLUZIONE

1. La densità ha supporto su un quadrato di lato $\sqrt{2}$ ed è pari a

$$f_{X,Y}(s,t) := \frac{1}{2} I_A((s,t))$$

dove $A := \{(s,t) : |s-t| \leq 1, |s+t| \leq 1\}$. Sfruttando la simmetria nello scambio tra X e Y è sufficiente calcolare la densità marginale della variabile X (le due densità coincidono),

$$\begin{aligned} f_X(s) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(s,t)\mathrm{d}t &= \begin{cases} 0 & |s| > 1 \\ \frac{1}{2}\int_{-1-s}^{1+s} \mathrm{d}t = 1+s & -1 \leq s \leq 0 \\ \frac{1}{2}\int_{s-1}^{1-s} \mathrm{d}t = 1-s & 0 < s \leq 1 \end{cases} \\ &= (1-|s|) I_{[-1,1]}(s). \end{aligned}$$

2. $f_{X,Y}(s,t) \neq 0$ su A mentre $f_X(s) f_Y(t) \neq 0$ su $I_{[-1,1]\times[-1,1]}$ quindi per il criterio di indipendenza per variabili aleatorie congiuntamente assolutamente continue si può concludere che X ed Y non sono indipendenti.

3. Dalla parità delle densità si ha che $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0$, mentre

$$\mathrm{var}(X) = \mathrm{var}(Y) = \int_{-1}^{1} s^2(1-|s|)\mathrm{d}s = 2\int_0^1 (s^2 - s^3)\mathrm{d}s = \frac{1}{6}.$$

4. Dalla parità della funzione densità rispetto all'origine di (X,Y) si ha che

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \int_{\mathbb{R}^2} st f_{X,Y}(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t = 0.$$

∎