I prova in itinere
Corso di calcolo delle probabilit
Ingegneria dell'Automazione

Prof. L. Ladelli

4.5.2004

Nome:

Cognome:

Matricola:

1 Domande

1. Indipendenza di eventi: definizione e conseguenze. Illustrare questa nozione mediante un esempio.

2. Formula di Bayes e formula delle probabilità totali.

3. Definizione di variabile aleatoria e di funzione di ripartizione di una variabile aleatoria. Esempi.

2 Esercizi

Esercizio 1 *Siano A e B due eventi tali che $P(A) = 0.3$ e $P(A \cup B) = 0.5$ Calcolare $P(B)$ nei seguenti casi:*

1 A e B sono indipendenti;

2. A e B sono disgiunti;

3. $P(A|B) = 0.2$.

SOLUZIONE

1. Usando la formula per la probabilità dell'unione si ottiene

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B) = 0.5 - 0.3 + 0.3P(B)$$

Da cui: $0.7P(B) = 0.2$, cioè $P(B) = 2/7$.

2. In questo caso $P(A \cap B) = 0$ e quindi dalla formula del punto precedente ottengo $P(B) = 0.5 - 0.3 = 0.2$.
3. Vale: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0.2$ e quindi $P(A \cap B) = 0.2P(B)$

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) - P(A \cap B) = 0.5 - 0.3 - 0.2P(B)$$

e quindi $0.8P(B) = 0.2$ e $P(B) = 1/4$

▮

Esercizio 2 *Un barman ha a disposizione 10 tipi di bevande. Chiamiamo cocktail una miscela con almeno 2 ingredienti; quanti tipi di cocktail può preparare? E quanti con non più di 5 ingredienti?*
SOLUZIONE Può preparare $2^{10} - 10 - 1 = 1013$ tipi di cocktail differenti. $\binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \binom{10}{5} + \binom{10}{5} = 627$ contengono al più 5 ingredienti. ▮

Esercizio 3 *A Tangentopoli si sa che il* 40% *degli abitanti sono corruttori. Tra i corruttori il* 90% *ha un reddito superiore a 1000000 di euro, mentre tra gli onesti solo il* 20% *raggiunge un simile reddito. Si presenta davanti a voi una persona a caso:*

1. *calcolare la probabilità che il suo reddito superi 1000000 di euro;*
2. *calcolare la probabilità che si tratti di un corruttore sapendo che il suo reddito supera 1000000 euro;*
3. *qual è la percentuale di corruttori tra coloro che hanno un reddito non superiore a 1000000 euro?*

SOLUZIONE Sia C l'evento "la persona è corrotta" e R l'evento "la persona ha un reddito superiore a 1000000 euro.

1. Si ha

$$\mathbb{P}(C) = 2/5, \quad \mathbb{P}(R|C) = 0.9, \quad \mathbb{P}(R|C^c) = 0.2$$

da cui

$$\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(R|C)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(R|C^c)\mathbb{P}(C^c) = 0.48.$$

2. Dal punto precedente

$$\mathbb{P}(C|R) = \frac{\mathbb{P}(R|C)\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(R)} = \frac{3}{4}$$
$$\mathbb{P}(C|R^c) = \frac{\mathbb{P}(R^c|C)\mathbb{P}(C)}{1 - \mathbb{P}(R)} = \frac{3}{13}.$$

▮

Esercizio 4 *Il numero di detenuti che arrivano al penitenziario di "Lovely Bloody Pals" in una giornata è descritto da una variabile di Poisson di parametro* 2. *Supponendo ogni giorno indipendente dagli altri si determini*

1. *la probabilità che in un giorno arrivi almeno un detenuto;*

2. *la probabilità che in 4 giorni consecutivi arrivi (in totale) almeno un detenuto (cioè ci sia almeno un giorno in cui si verifica l'evento "arriva (almeno) un detenuto" di cui avete calcolato la probabilità al punto 1.);*
3. *la probabilità che esattamente in 2 giorni su 4 non vi siano nuovi arrivi.*

SOLUZIONE

1. Sia p la probabilità che in un giorno arrivi almeno un detenuto. Allora, indicata con X la variabile aleatoria che indica il numero di detenuti che arrivano al penitenziario in una giornata, $p = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-2}$
2. Se Y indica la variabile aleatoria che conta il numero di giorni in cui c'e almeno un arrivo (successo), allora $Y \sim Bin(4, p = 1 - e^{-2})$ e la probabilità richiesta è $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - e^{-8}$.
3. La probabilità richiesta è $P(Y = 2) = \binom{4}{2} e^{-4}(1 - e^{-2})^2$.

∎

Esercizio 5 *Sul tavolo vi sono 10 cartoline alcune delle quali posseggono una o più delle seguenti caratteristiche:*

$F :=$ *"presenza di un francobollo"*
$C :=$ *"foto a colori"*
$I :=$ *"provenienza da una località italiana".*

Sappiamo che, pescando una cartolina a caso,

$$\mathbb{P}(F) = 1/2,\ \mathbb{P}(C) = 2/5,\ \mathbb{P}(I) = 3/5$$
$$\mathbb{P}(F \cap C) = 1/5,\ \mathbb{P}(C \cap I) = 3/10,\ \mathbb{P}(F \cap I) = 3/10$$
$$\mathbb{P}(F \cap C \cap I) = 1/10.$$

1. *Qual è la probabilità dell'evento $F^c \cap C^c \cap I^c$?*
2. *Quante sono le cartoline che non posseggono alcuna delle caratteristiche suddette?*

SOLUZIONE

1. $P(F^c \cap C^c \cap I^c) = 1 - P(F \cup C \cup I) = 1 - 8/10$;
2. $10 * P(F^c \cap C^c \cap I^c) = 2$.

∎

Esercizio 6 *Due dadi equilibrati (ed indipendenti) vengono lanciati e si denoti con M il valore massimo osservato.*

1. *Si scriva la legge (discreta) di M.*
2. *Determinare e rappresentare graficamente la funzione di ripartizione F_M della variabile M.*
3. *Calcolare $P(M > 2)$.*

SOLUZIONE

1. $M \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $P(M = i) = \frac{2i-1}{36}$ per $i = 1, \ldots, 6$ e 0 altrimenti, è la densità di M.
2. $P(M > 2) = 1 - P(M = 1) - P(M = 2) = 8/9$

3. Essendo M discreta la F_M è costante a tratti e vale: $F_M(x) = 0$ per $x < 1$, $F_M(x) = 1/36$ per $1 \leq x < 2$, $F_M(x) = 4/36$ per $2 \leq x < 3$, $F_M(x) = 9/36$ per $3 \leq x < 4$, $F_M(x) = 16/36$ per $4 \leq x < 5$,$F_M(x) = 25/36$ per $5 \leq x < 6$ e $F_M(x) = 1$ per $x > 6$.

▮

Esercizio 7 *Sia X una variabile aleatoria assolutamente continua con densità $f_X(x) = cx(1-x)I_{(0,1)}(x)$ con c costante opportuna.*

1. *Determinare c.*
2. *Si calcoli $P(X > 1/2)$.*
3. *Determinare la funzione di ripartizione di X.*

Soluzione

1. Deve essere $1 = \int_0^1 cx(1-x)dx$ e quindi $c = 6$.
2. Per la simmetria di f_X rispetto a $x = 1/2$, o mediante il calcolo diretto di $\int_{1/2}^1 6x(1-x)dx$, si ottiene $P(X > 1/2) = 1/2$.
3. $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt$. Quindi $F_X(x) = 0$ se $x \leq 0$, $F_X(x) = 1$ se $x \geq 1$ e per $0 < x < 1$ $F_X(x) = \int_0^x 6t(1-t)dt = 6\frac{x^2}{2} - 6\frac{x^3}{3}$.

▮

Esercizio 8 *Abbiamo a disposizione 2 neon per l'illuminazione di un magazzino. Sappiamo che ognuno di essi ha una probabilità p di funzionare per almeno 200 giorni e sono tutti indipendenti. Siamo indecisi tra due configurazioni: mettere in serie i due neon oppure metterli in parallelo. Ricordando che:*

- *un sistema formato da due componenti in serie funziona se e solo se entrambi funzionano*
- *un sistema formato da due componenti in parallelo funziona se e solo se almeno uno di essi funziona,*

si dica quale scelta è più conveniente al variare di $p \in (0,1)$ (cioè quale scelta massimizza la probabilità che l'intero sistema funzioni per almeno 200 giorni). E se i neon fossero n?

Soluzione Esaminiamo la prima configurazione (serie): il sistema funziona per almeno 200 giorni se entrambi i neon funzionano per almeno 200 giorni e questo avviene con probabilità p^2 per l'ipotesi di indipendenza. Nella configurazione in parallelo invece il sistema non funzione per almeno 200 giorni se entrambi i neon si guastano prima di 200 giorni e cio' avviene con probabilità $(1-p)^2$ sempre per l'ipotesi di indipendenza. Il sistema funziona quindi per almeno 200 giorni con probabilità $1-(1-p)^2 = -p^2 + 2p = p(2-p)$. Poichè per ogni $p \in (0,1)$ $p^2 < p(2-p)$, come ci si aspetta il sistema in parallelo è sempre più conveniente di quello in serie.

Con un ragionamento analogo si vede facilmente che se il numero di neon è n: la probabilità di funzionare nel sistema in serie è p^n, mentre nel sistema in parallelo è $1-(1-p)^n$, e questa seconda probabilità è sempre maggiore della prima. ▮