I Recupero
Corso di calcolo delle probabilità
Ingegneria dell'Automazione

Prof. L. Ladelli

12.7.2004

Nome:

Cognome:

Matricola:

I PARTE

1 Domande

1. Definizione di probabilità (assiomi di Kolmogorov). Principali proprietà di una probabilità.
2. Definizione di densità di probabilità di una variabile aleatoria discreta e sue proprietà. Illustrare questa nozione con un esempio significativo.

2 Esercizi

Esercizio 2.1 Un certo gioco consiste nell'estrarre 5 carte da un mazzo di 40 carte napoletane[1]; si vince se ci sono 4 assi (sulle 5 estratte). Giorgio intende giocare, ma, per aumentare la probabilità di vittoria, senza essere visto, inserisce nel mazzo un secondo asso di bastoni. Poi gioca, estraendo 5 carte dal mazzo truccato.

1. Qual è la probabilità che Giorgio non venga scoperto?
2. Quanto vale la probabilità che Giorgio vinca ma, nello stesso tempo, non venga scoperto?
3. Supponiamo che fra le 5 carte estratte da Giorgio ci sia un solo asso di bastoni e nessun altro asso. Ora, senza reimmettere le 5 carte estratte, Giorgio ne estrae altre 5. Quanto vale la probabilità che il trucco di Giorgio venga scoperto?

Soluzione

Siamo nel caso di spazio equiprobabile finito.

1. Giorgio viene scoperto se estrae entrambi gli assi di bastoni. Ci sono $\binom{41}{5}$ modi di estrarre le 5 carte. Tra questi quelli favorevoli all'evento sono: $\binom{2}{2}\binom{39}{3}$. La probabilità richiesta vale quindi:

$$1 - \frac{\binom{39}{3}}{\binom{41}{5}} = \frac{81}{82}.$$

[1]un mazzo di carte napoletane è un insieme di 40 elementi divisi in 4 classi di 10 elementi ciascuno chiamati "semi" o "pali" e indicati convenzionalmente con i nomi di "denari", "coppe", "spade" e "bastoni". Gli elementi di ogni palo sono numerati da 1 a 10. Il primo elemento di ogni palo è detto "asso".

2. Giorgio vince e non viene scoperto se estrae esattamente 4 assi, ma non estrae la combinazione dei 2 assi di bastoni ed esattamente altri 2 assi. La probabilità di estrarre esattamente 4 assi è:

$$\frac{\binom{5}{4}\binom{36}{1}}{\binom{41}{5}},$$

mentre quella di estrarre i 2 assi di bastoni ed esattamente altri 2 assi è

$$\frac{\binom{2}{2}\binom{3}{2}\binom{36}{1}}{\binom{41}{5}},$$

ne segue che la probabilità cercata è:

$$\frac{\binom{5}{4}\binom{36}{1}}{\binom{41}{5}} - \frac{\binom{2}{2}\binom{3}{2}\binom{36}{1}}{\binom{41}{5}} \frac{36}{374699}.$$

3. Il trucco viene scoperto se Giorgio ora estrae l'altro asso di bastoni. Ora il mazzo è costituito da 36 carte. La probabilità richiesta è:

$$\frac{\binom{1}{1}\binom{35}{4}}{\binom{36}{5}} \frac{5}{36}.$$

∎

Esercizio 2.2 Il numero di sbalzi di tensione che avvengono in un giorno in una rete elettrica è modellabile tramite una variabile di Poisson di parametro 3.

1. In un mese, quanti sbalzi di tensione vi aspettate in media? (Giustificare adeguatamente la risposta).
2. Sapendo che in un dato giorno ci sono stati sbalzi di tensione, calcolare la probabilità che in quel giorno ve ne siano stati almeno 3.
3. Supponendo che gli sbalzi di tensione in giorni differenti siano indipendenti, determinare approssimativamente il più piccolo numero di giorni k necessari affinchè con probabilità almeno pari al 95% si siano avuti più di 1000 sbalzi di tensione.

Soluzione

1. Sia S_i il numero di sbalzi di tensione nel giorni i, allora $S_i \sim Poiss(3)$. Supponendo un mese fatto di 30 giorni si ha $E(S_1 + \cdots + S_{30}) = 30 \times 3 = 90$. Mi aspetto, in media, 90 sbalzi di tensione in un mese.
2. La probabilità richiesta è

$$P(S_i \geq 3 | S_i > 0) = \frac{P(S_i \geq 3)}{P(S_i > 0)} = \frac{1 - P(S_i \leq 2)}{1 - P(S_i = 0)} = \frac{1 - e^{-3} - 3e^{-3} - \frac{3^2 e^{-3}}{2}}{1 - e^{-3}}.$$

3. Possiamo usare l'approssimazione fornita dal TCL:

$$P(S_1 + \cdots + S_k > 1000) = 1 - P(S_1 + \cdots + S_k \leq 1000) = 1 - \phi\left(\frac{1000 - 3k}{\sqrt{3k}}\right) > 0.95$$

da cui

$$\phi\left(\frac{1000 - 3k}{\sqrt{3k}}\right) < 0.05.$$

Si cerca quindi k tale che

$$\frac{1000 - 3k}{\sqrt{3k}} < z_{0.05} = -1.645$$

e risolvendo l'equazione in k si ottiene $k \geq 352$.

■

Esercizio 2.3 Gli iscritti ad una gara di judo sono per il 60% femmine e per il 40% maschi e vengono classificati in categorie in base al loro peso. Supponiamo che il peso (in Kg) di un individuo scelto a caso in questa popolazione abbia densità gaussiana $\mathcal{N}(60, 81)$ se l'individuo è femmina e densità gaussiana $\mathcal{N}(80, 100)$ se è maschio. Scegliamo ora un individuo a caso tra gli iscritti alla gara.

1. Sapendo che l'individuo scelto è femmina calcolare la probabilità che abbia un peso compreso tra 70 e 100 kg.
2. Calcolare in generale la probabilità che l'individuo scelto a caso abbia un peso compreso tra 70 e 100 kg.
3. Sapendo che l'individuo scelto a caso ha un peso compreso tra 70 e 100 kg calcolare la probabilità che sia femmina.

Soluzione Sia F l'evento "l'individuo scelto a caso è femmina" e K la variabile aleatoria "peso dell'individuo scelto a caso".

1. La probabilità che il peso di un individuo di sesso femminile sia compreso tra 70 e 100 kg si calcola come
$$\begin{aligned}&P(70 < K \leq 100|F) = P(K \leq 100|F) - P(K \leq 70|F) =\\ &= \Phi((100-60)/\sqrt{81}) - \Phi((70-60)/\sqrt{81})\Phi(40/9) - \Phi(10/9) \simeq 0.9999 - 0.8667 = 0.1332\end{aligned}$$
2. Per la formula delle probabilità totali:
$$P(70 < K \leq 100) = P(70 < K \leq 100|F)P(F) + P(70 < K \leq 100|F^c)P(F^c)$$
dove $P(F) = 0.6$, $P(F^c) = 0.4$ e
$$\begin{aligned}&P(70 < K \leq 100|F^c) = P(K \leq 100|F^c) - P(K \leq 70|F^c) =\\ &= \Phi((100-80)/\sqrt{100}) - \Phi((70-80)/\sqrt{100})\Phi(2) - \Phi(-1) \simeq 0.9772 - 0.1587 = 0.8185.\end{aligned}$$
La probabilità richiesta è quindi (approssimativamente) 0.4074.
3. Per la formula di Bayes
$$P(F|70 < K \leq 100) = \frac{P(70 < K \leq 100|F)P(F)}{P(70 < K \leq 100)} \simeq \frac{0.0799}{0.4074} = 0.1962.$$

■

Esercizio 2.4 * Un'indagine statistica ha rivelato che il 15% degli abitanti di una certa città fa l'elemosina ai mendicanti che vede sul marciapiede. Supponete che gli abitanti si comportino in modo indipendente l'uno dall'altro.

1. Qual è la probabilità che un mendicante di quella città riceva elemosina da almeno 3 delle prime 20 persone che passano?
2. Quante persone al minimo devono passare davanti al mendicante perchè con probabilità superiore a 0.5 gli venga fatta almeno un'elemosina?
3. Supposto che ogni persona che fa l'elemosina dia 50 centesimi di euro, quante persone devono passare perchè il mendicante ottenga, in media, 2 euro di elemosina prima di andarsene?

Soluzione Si può descrivere il fatto che una persona faccia o meno l'elemosina con una v.a. X_i che assume i valori 1 (= fa elemosina) e 0 con probabilità, rispettivamente, 0.15 e 0.85. Supposto che ogni persona si comporti, rispetto a ciò, in modo indipendente dalle altre, siamo di fronte ad uno schema di Bernoulli di parametro $p = 0.15$. Quindi:

1. La probabilità cercata è la probabilità che ci siano almeno 3 successi in 20 prove; il numero di successi in n prove ha legge Binomiale quindi

$$\sum_{i=3}^{20} \binom{20}{i} 0.15^i 0.85^{20-i} = 1 - \sum_{i=0}^{2} \binom{20}{i} 0.15^i 0.85^{50-i} = 0.595$$

2. La probabilità cercata è la probabilità che di n persone almeno una faccia elemosina, cioè

$$1 - 0.85^n \geq 0.5 \Longleftrightarrow n \geq \log_q 0.5 \Longleftrightarrow n \geq \frac{\ln 0.5}{\ln 0.85} = 4.265$$

quindi almeno 5 persone.

3. Sia G_i che vale 0,50 se la persona $i-$ma fa l'elemosina, 0 se non la fa. Dopo n persone il mendicante ottiene, in media, $\mathrm{E}(G_1 + \cdots + G_n)$. Ma $\mathrm{E}(G_i) = 0.50 \times 0.15 + 0 \times 0.85 = 0.075$ per ogni i , quindi $\mathrm{E}(G_1 + \cdots + G_n) = n \times 0.075$ Da cui $n = 2/0.075 = 26.7$

∎

I Recupero
Corso di calcolo delle probabilità
Ingegneria dell'Automazione

Prof. L. Ladelli

12.7.2004

Nome:

Cognome:

Matricola:

II PARTE

1 Domande

1. Definizione di variabile aleatoria assolutamente continua e principali proprietà. Illustrare questa nozione mediante un esempio significativo.
2. Definizione di matrice di covarianza di un vettore aleatorio e sue principali proprietà.

2 Esercizi

Esercizio 2.1 Sia $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ un vettore gaussiano $\mathcal{N}(\underline{\mu}, C)$, dove:

$$\underline{\mu} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Determinare, al variare di $\lambda \in (-\infty, \infty)$, la legge del vettore (U, V) definito come segue:

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \lambda X_1 + X_2 \end{pmatrix}$$

2. Quanto deve valere λ affinchè $P(U + V > 3) > 0.5$?

Soluzione

1.

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

il rango di A è sempre 2 quindi $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ è un vettore gaussiano che ammette densità per ogni $\lambda \in (-\infty, +\infty)$. Il vettore delle medie è $\mu_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$ e la matrice di covarianza è:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & \lambda + 1 \\ \lambda + 1 & \lambda^2 + 2\lambda + 2 \end{pmatrix}$$

2. Si ha $U + V \sim \mathcal{N}(\lambda + 1, \lambda^2 + 4\lambda + 5)$, quindi:

$$\Phi\left(\frac{3 - \lambda - 1}{\sqrt{\lambda^2 + 4\lambda + 5}}\right) < 0.5 \qquad \text{sse} \qquad \lambda > 2$$

∎

Esercizio 2.2 Siano X ed Y due variabili aleatorie indipendenti, entrambe distribuite con densità uniforme su $(0, 2)$.

1. Calcolare la funzione di ripartizione e la densità di $T = \max(X, Y)$.
2. Calcolare la media e la varianza di T.
3. Calcolare $P(T \in (1/2, 3/2))$.

Soluzione

1. Indicata con F_T la funzione di ripartizione di $T = \max(X, Y)$, è immediato vedere che $F_T(t) = 0$ per $t \leq 0$ e $F_T(t) = 1$ per $t \geq 2$. Sia ora $0 < t < 2$. $F_T(t) = P(\max(X, Y) \leq t) = P(X \leq t, Y \leq t) = P(X \leq t)P(Y \leq t) = \frac{1}{4}t^2$. Calcoliamo la densità f_T di T. Derivando $F_T(t)$ per $t \neq 0$ e $t \neq 2$ otteniamo $f_T(t) = \frac{1}{2}tI_{(0,2)}(t)$.
2. $\mathrm{E}(T) = \int_0^2 \frac{1}{2}t^2 dt = 4/3$. $\mathrm{E}(T^2) = \int_0^2 \frac{1}{2}t^3 dt = 2$ e quindi $\mathrm{Var}(T) = \mathrm{E}(T^2) - (\mathrm{E}(T))^2 = 2/9$.
3. $P(1/2 < T < 3/2) = P(1/2 < T \leq 3/2) = F_T(3/2) - F_T(1/2) = 1/2$.

∎

Esercizio 2.3 Siano X ed Y due variabili aleatorie indipendenti bernoulliane di parametro $p = \frac{1}{2}$.

1. Determinare la densità del vettore $(U, V) = (X + Y, |X - Y|)$.
2. Calcolare la covarianza di U e V.
3. Le variabili aleatorie U e V sono indipendenti?

Soluzione

1. Indichiamo con p la densità del vettore aleatorio discreto U, V: $p(i, j) = P(U = i, V = j) = 0$ se $(i, j) \notin \{0, 1, 2\} \times \{0, 1\}$. Su questo insieme la finzione p è fornita dalla seguente tabella:

	$U = 0$	$U = 1$	$U = 2$	V
$V = 0$	$1/4$	0	$1/4$	$1/2$
$V = 1$	0	$1/2$	0	$1/2$
U	$1/4$	$1/2$	$1/4$	

2. $\mathrm{Cov}(U, V) = \mathrm{E}(UV) - \mathrm{E}(U)\,\mathrm{E}(V) = 1/2 - 1/2 = 0$.
3. Pur essendo la covarianza 0 le variabili aleatorie non sono indipendenti. Infatti $P(U = 0, V = 1) = 0 \neq P(U = 0)P(V = 1) = 1/4 \cdot 1/2 = 1/8$.

∎

Esercizio 2.4 Il tempo di funzionamento (espresso in ore) di un motore elettrico, ancora in rodaggio, può essere rappresentato dalla variabile aleatoria $T = X^4$, con X variabile aleatoria esponenziale di parametro 0.25.

1. Determinare la densità di T.
2. Sapendo che il motore è ancora funzionante dopo 192 ore, calcolare la probabilità che funzioni nelle successive 50 ore.

Soluzione

1. $f_T(t) = f_X(t^{1/4})\frac{1}{4}t^{-3/4}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(t) = \frac{\lambda}{4}t^{-3/4}\mathrm{e}^{-\lambda t^{(1/4)}}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(t)$.
2. Si tratta di calcolare

$$P(T > 50 + 192 | T > 192) = \frac{P(T > 242)}{P(T > 192)} = \frac{P(X > (242)^{0.25})}{P(X > (192)^{0.25})} = \mathrm{e}^{-0.2217\times 0.25} = 0.9461.$$

∎