Statistica Matematica A

ENG A-Z

Esercitatori: dott.ssa E. Rosazza - dott. F. Zucca

Esercitazione # 3

1 Distribuzione di Bernoulli e Distribuzione Binomiale

Esercizio 1 *Sia n un intero maggiore di uno. Si consideri l'esperimento di lanciare $2n$ volte una moneta equilibrata. Mostrare che la probabilità $p_{n,2n}$ di osservare un numero di teste minore di n è sempre minore di $1/2$ e vale il seguente risultato:*

$$\lim_{n\to+\infty} p_{n,2n} = 1/2.$$

Esercizio 2 *Viene condotto un esperimento costituito da N prove indipendenti, con probabilità di successo pari a p. Qual è la probabilità che il primo successo avvenga alla prova i-esima, sapendo che il successo k-esimo avviene alla prova n-esima?*

Calcolo esplicito nel caso $k = 2$

Esercizio 3 *(Scimmie Tipografe) Sia $\{X_i\}_{i=1}^{+\infty}$ una successione di variabili indipendenti di Bernoulli di parametro $p \in (0,1)$ e sia $(y_1, \ldots, y_n) \in \{0,1\}^n$ una sequenza finita fissata.*

1. *Mostrare che $\mathbb{P}(\exists i : X_i = y_1, X_{i+1} = y_2, \ldots, X_{n+i-1} - y_n) = 1$;*

2. *Mostrare che se $X := \bigcup_{n=1}^{\infty} \{0,1\}^n$ è l'insieme di tutte le sequenze finite di zeri ed uno allora, detta $l(y)$ la lunghezza di $y \in X$,*

$$\mathbb{P}(\forall y \in X : \exists i : y = (X_i, X_{i+1}, \ldots, X_{l(y)+i-1})) = 1.$$

Esercizio 4 *Trovate la probabilita' che in 5 lanci di un dado non truccato il 3 si presenti*

1. *mai*

2. *almeno una volta*

3. *quattro volte*

Esercizio 5 *Assumendo che la probabilita' che nasca un maschio sia 1/2, trovate la probabilita' che in una famiglia con 4 figli ci sia*

1. *almeno un maschio;*
2. *almeno un maschio e una femmina.*
3. *Consideriamo ora 4000 famiglie con 4 figli. Quante ci si aspetterebbe che abbiano almeno un maschio e una femmina?*

Esercizio 6 *Se il 20% dei bulloni prodotti da una certa macchina e' difettoso, determinate la probabilita' che, su 4 bulloni scelti a caso*

1. *uno sia difettoso;*
2. *zero siano difettosi;*
3. *al massimo 2 siano difettosi.*
4. *Trovare la media e lo scarto quadratico medio della distribuzione dei bulloni difettosi su un totale di 400 bulloni.*

Esercizio 7 *Durante un esame a risposta multipla con 5 domande e 3 possibili risposte per ogni domanda.*

1. *Quale e' la probabilita' che uno studente azzecchi almeno 4 risposte semplicemente rispondendo a caso?*
2. *Quale e' il numero medio di risposte azzeccate?*

Esercizio 8 *La probabilita' di laurearsi di uno studente che entra nell'Universita' e' 0.4. Determinate la probabilita' che, su 5 studenti*

1. *nessuno*
2. *uno*
3. *almeno uno riesca a laurearsi*

Esercizio 9 *Un passeggero qualsiasi ha una probabilita' p di non presentarsi all'imbarco, pertanto una compagnia aerea accetta N prenotazioni per un aereo con capienza n ($n \leq N$). Qual e' la probabilita' che almeno un passeggero con regolare prenotazione resti a terra? Supponendo che $p = 1/10$, tale evento e' piu' probabile nel caso $N = 22$, $n = 20$ oppure $N = 11$, $n = 10$?*

Esercizio 10 *Un processo di lavorazione fabbrica fusibili che dovrebbero avere una percentuale di pezzi difettosi non superiore a* 1%. *Il controllo si fa provando 10 fusibili a caso tra quelli prodotti e se anche solo uno di essi risulta difettoso, si ferma la produzione e si procede alla verifica dell'impianto.*

1. *Se la probabilita' di produrre un pezzo difettoso fosse esattamente* 0.01, *quale sarebbe la probabilita' di fermare l'impianto dopo un controllo?*

2. *Quanti fusibili devono essere controllati affinché la probabilita' di fermare l'impianto sia pari a* 0.95 *nell'ipotesi che la percentuale di pezzi difettosi sia* 10%*?*

Esercizio 11 *Un test si compone di n domande ciascuna con k risposte (di cui solo una giusta). Qual è la probabilità che uno studente, rispondendo a caso ottenga i risposte esatte? Almeno i risposte esatte? Qual è la media di risposte esatte? Supponendo che per avere la sufficienza bastino i_0 risposte esatte, qual è il valore atteso della percentuale di studenti che passano l'esame se tutti rispondono a caso? Dare i risultati numerici nel caso $n = 10$, $k = 4$ e $i \in \{1, 6\}$.*

2 Distribuzione di Poisson

Esercizio 12 *Tra le 2 e le 4 del pomeriggio, in media, al minuto, il numero di chiamate telefoniche che arrivano ad un certo centralino è 2.5. Trovate la probabilità che, in un minuto, ci siano*

1. *zero*

2. *due*

3. *quattro o meno*

4. *piu' di sei chiamate telefoniche*

Esercizio 13 *Un certo tipo di foglio metallico, in media, ha 5 difetti per 10 mq. Se assumiamo una distribuzione di Poisson, qual è la probabilità che un foglio di 15 mq abbia almeno 3 difetti?*

Esercizio 14 *In un lungo manoscritto, si è scoperto che solo il 13.5% delle pagine contengono errori tipografici. Se assumiamo che il numero di errori per pagina sia una variabile aleatoria con una distribuzione di Poisson, trovate la % di pagine che hanno esattamente 1 errore.*

Esercizio 15 *Secondo certe statistiche sugli USA, il numero medio annuo di annegamenti accidentali è di 3 su 100000 abitanti. Trovate la probabilità che, in una città con popolazione pari a 200000 abitanti, vi siano*

1. *due annegamenti accidentali all'anno*
2. *meno di tre annegamenti accidentali all'anno*

Esercizio 16 *Una sostanza radioattiva emette particelle secondo un processo di Poisson. Se la probabilità di non emissione in un intervallo di 1 secondo è pari a 0.165, trovate*

1. *il numero atteso di emissioni per secondo*
2. *la probabilità di non emissione in un intervallo di 2 secondi*
3. *la probabilità di non più di 2 emissioni in un intervallo di 4 secondi*

Esercizio 17 *In una banca vi sono* 10 *sportelli; siano* $X_1, \ldots, X_{10}$ *il numero di persone presenti agli sportelli e si supponga che siano variabili aleatorie indipendenti con distribuzione di Poisson di parametro* $\lambda = 2$*. Calcolare:*

1) la probabilità che vi sia almeno una persona in banca;

2) il valor medio del numero di persone presenti in banca;

3) la probabilità che vi siano almeno 3 clienti al primo sportello sapendo che in ciascuno degli altri ve ne sono meno di 2;

4) la probabilità che almeno uno sportello sia libero.

3 Svolgimenti

Soluzione esercizio 1.
Abbiamo che

$$p_{n,2n} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} \frac{1}{2^{2n}} = \sum_{k=0}^{n-1} P(\text{ avere k successi in 2n prove di Bernoulli }).$$

- Per simmetria, trattandosi del lancio di una moneta equilibrata:

$$P(\text{avere un numero maggiore di n di successi in 2n prove}) = \\ P(\text{avere un numero minore di n di successi in 2n prove})$$

- Inoltre $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \frac{1}{2^{2n}} = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^{2n} = 1$.

Quindi

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{k}\frac{1}{2^{2n}}+\binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}}+\sum_{k=n+1}^{2n}\binom{2n}{k}\frac{1}{2^{2n}}=2p_{n,2n}+\binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}}=1$$

da cui,

$$p_{n,2n}=\frac{1}{2}(1-\binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}})<\frac{1}{2}\qquad\forall n\geq 1$$

Questo conclude la prima parte.

Per quanto riguarda la seconda, utilizziamo la formula di Stirling: $\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{\sqrt{n}\frac{n^n}{e^n}}=\sqrt{2\pi}$.

Abbiamo che:

$$\lim_{n\to+\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}}=0$$

e quindi:

$$\lim_{n\to+\infty}p_{n,2n}=\frac{1}{2}$$

Soluzione esercizio 2.

Siano

A_i:="il primo successo è alla i-esima prova"

B:="il k-esimo successo è all'n-esima prova". Allora

$$\mathbb{P}(B|A_i)=\begin{cases}\binom{n-1-i}{k-2}p^{k-1}(1-p)^{n-i-k+1} & n-i\geq k-1\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

cioè è la probabilità di avere $k-2$ successi in $n-1-i$ tentativi (dall'$i+1$-esimo all'$n-1$-esimo compresi). inoltre $\mathbb{P}(A_i)=(1-p)^{i-1}p$ e $\mathbb{P}(B)=\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}$ (che è la probabilità di avere $k-1$ successi nei primi $n-1$ tentativi ed uno nell'ultimo). Pertanto, dalla formula di Bayes,

$$\mathbb{P}(A_i|B)=\frac{\mathbb{P}(B|A_i\mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(B)}=\frac{\binom{n-1-i}{k-2}}{\binom{n-1}{k-1}}=\frac{(n-i-1)!(n-k+1)!}{(n-i-k+1)!(n-1)!}(k-1).$$

Nel caso particolare $k=2$ allora $\mathbb{P}(A_i|B)=1/(n-1)$ che è la distribuzione uniforme sui primi $n-1$ tentativi.

Soluzione esercizio 3.

Si osservi che (2) $\implies$ (1), pertanto basta mostrare (2). Inoltre, essendo $\{0,1\}$ finito anche $\{0,1\}^n$ lo è (per ogni $n\in\mathbb{N}$) e quindi $X:=\bigcup_{i=1}^{+\infty}$ è numerabile. Si definisca $A_{y,i}:=\{(X_{i+1},\dots,X_{i+l(y)})=y\}$ (è l' evento "la sequenza di lunghezza $l(y)$ che parte da $i+1$ coincide con la sequenza y"), si ha che $\{A_{y,i\cdot l(y)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ sono indipendenti (per ogni $y \in X$ fissato) e $\mathbb{P}(A_{y,i}) = p^{\text{card}\{j:y_j=1\}}(1-p)^{\text{card}\{j:y_j=0\}} = \alpha_y > 0$. Pertanto si ha

$$1 \geq \mathbb{P}(\exists i : A_{y,i}) \geq \mathbb{P}(\exists i : A_{y,i\cdot l(y)}) = 1 - \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{+\infty} A^c_{y,i\cdot l(y)}) = 1$$

poiché

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{+\infty} A^c_{y,i\cdot l(y)}) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A^c_{y,i\cdot l(y)}) = \lim_{n\to+\infty}(1-p)^n = 0$$

(in realtà è sufficiente osservare che $\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{+\infty} A^c_{y,i\cdot l(y)}) \leq \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A^c_{y,i\cdot l(y)})$ per ogni $n \geq 1$ per giungere alla stessa conclusione).

Osservazione: Lo stesso risultato vale anche considerando Z al pù numerabile al posto di $\{0,1\}$ con probabilità $\{p_z\}_{z\in Z}$ strettamente positive e tali che $\sum_{z\in Z} p_z = 1$; inoltre, utilizzando tecniche più raffinate, si può mostrare che, definito

$$I := \{i = 1, \dots, l(y) : y_j = y_{l(y)-i+j}, \forall j = 1, \dots, i\}$$

(ovviamente $l(y) \in I$), allora per il tempo di attesa del primo successo N della sequenza y si ha un valore medio

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{i\in I}\prod_{j=1}^{i} p_{y_j}.$$

Soluzione esercizio 4.

Sia X la variabile aleatoria che indica il numero di volte che si presenta 3. La probabilità di successo in questo esperimento binomiale (cioè la probabilità che si presenti 3) è pari a 1/6 e consideriamo 5 ripetizioni dell'esperimento (cioè il dado viene lanciato 5 volte). Quindi X ha una distribuzione binomiale con parametri n = 5 e p = 1/6.

1. $P(X=0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}(1/6)^0(1-1/6)^5 = (5/6)^5 = 0.4019$;
2. $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0.4019 = 0.5981$;
3. $P(X=4) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}(1/6)^4(1-1/6)^1 = \frac{25}{6}(1/6)^4 = 0.0032$.

Soluzione esercizio 5.

Sia X la variabile aleatoria che indica il numero di figli maschi nella famiglia con 4 figli. La v.a. X ha una distribuzione binomiale con parametri n = 4 e p = 1/2.

1. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\begin{array}{c} 4 \\ 0 \end{array} \right) (1/2)^0 (1-1/2)^4 = 15/16 = 0.9375$

2. P(almeno un maschio e una femmina)=1 - P(nessun maschio) - P(nessuna femmina)=$1 - (1/2)^4 - (1/2)^4 = 7/8$

3. Sia Z la variabile aleatoria che indica il numero di famiglie con almeno un maschio e una femmina fra le 4000 considerate. La probabilità di successo p, come ottenuto nel punto precedente è pari a 7/8. La v.a. Z ha una distribuzione binomiale con parametri n = 4000 e p = 7/8. Perciò il numero atteso di famiglie con almeno 1 maschio e una femmina è dato da:

$$E(Z) = np = 4000(7/8) = 3500$$

Soluzione esercizio 6.

Sia X la v.a. che indica il numero di bulloni difettosi fra i 4 considerati ed ha una distribuzione binomiale con parametri n = 4 e p = 0.2.

1. $P(X = 1) = \left(\begin{array}{c} 4 \\ 1 \end{array} \right) (0.2)^1 (1 - 0.2)^3 = 0.4096;$

2. $P(X = 0) = \left(\begin{array}{c} 4 \\ 0 \end{array} \right) (0.2)^0 (1 - 0.2)^4 = 0.4096;$

3. $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0.4096 + 0.4096 + \left(\begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} \right) (0.2)^2 (1 - 0.2)^2 = 0.4096 + 0.4096 + 0.1536 = 0.9728;$

4. Sia Z la v.a. che indica il numero di bulloni difettosi su un totale di 400, e quindi Z ha una distribuzione binomiale di parametri n = 400 e p = 0.2. Perciò abbiamo che la media è pari a $E(Z) = np = 400(0.2) = 80$ e lo scarto quadratico medio è dato da $\sigma(Z) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{400(0.2)(0.8)} = 8$.

Soluzione esercizio 7.

Sia X la v.a. che indica il numero di risposte azzeccate fra le 5 domande dell'esame, e quindi X ha una distribuzione binomiale di parametri n = 5 e p = 1/3.

1. $P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) = 0.04527$

2. Il numero medio di risposte azzeccate è dato da $E(X) = np = 5(1/3) = 5/3$.

Soluzione esercizio 8.

Sia X la v.a. che indica il numero di studenti che riescono a laurearsi su 5 studenti. La v.a. X ha una distribuzione binomiale con parametri n = 5 e p = 0.4.

1. $P(X=0)=(0.6)^5=0.07776$
2. $P(X=1)=5(0.4)(0.6)^4=0.2592$
3. $P(X\geq 1)=1-P(X=0)=0.92224$

Soluzione esercizio 9.
Sia p la probabilità che un passeggero non si presenti (i passeggeri sono considerati indipendenti), sia n la capienza dell' aereo ed N il numero delle prenotazioni. Il numero di passeggeri presenti $K\sim \mathrm{Bin}(N,1-p)$, pertanto

$$\mathbb{P}(K>n)=\sum_{i=n+1}^{N}\binom{N}{i}p^{N-i}(1-p)^i.$$

Se $n=20$, $N=22$ e $p=1/10$ si ha

$$p_1:=\mathbb{P}(K>20)=\frac{1}{10^{22}}\left(22\cdot 9^{21}+9^{22}\right)$$

mentre se $n=10$, $N=11$ e $p=1/10$ si ha

$$p_2:=\mathbb{P}(K>10)=\frac{9^{11}}{10^{11}}$$

ed infine

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{11}{5}\left(\frac{9}{10}\right)^{10}+\left(\frac{9}{10}\right)^{11}>1.$$

Soluzione esercizio 10.
Si N_n il numero di fusibili difettosi tra n presi a caso (indipendenti tra loro); $N_n\sim \mathrm{Bin}(n,p)$ (il cui valore medio, ricordiamo, è np).

1. $$\mathbb{P}(N_{10}=0)=1-0.99^{10}\approx 0.0962.$$

2. Cerchiamo n tale che $\mathbb{P}(N_n>0)\geq 0.95$ quando $p=0.1$ pertanto

$$1-(1-p)^n>0.95 \iff n\geq \left]\frac{\log(0.05)}{\log(0.9)}\right[=]28.43[=29.$$

Soluzione esercizio 11.
Sia

$$X_i:=\begin{cases}1 & \text{se la risposta } i\text{-esima è esatta}\\ 0 & \text{se la risposta } i\text{-esima è sbagliata}\end{cases}$$

pertanto sono variabili Bernoulliane i.i.d. di parametro $1/k$; la variabile $S := \sum_{i=1}^n x_i$ che conta le risposte esatte ha una distribuzione $\mathrm{Bin}(n, 1/k)$ da cui

$$\mathbb{P}(S = i) = \binom{n}{i} \frac{(k-1)^{n-i}}{k^n}, \qquad \mathbb{P}(S \geq i) = \sum_{j=i}^{n} \binom{n}{j} \frac{(k-1)^{n-j}}{k^n}.$$

Inoltre se definiamo $S_1, \ldots, S_N$ il numero di risposte date da N studenti (non importa che siano indipendenti, basta che siano identicamente distribuite ed in questo caso lo sono in quanto tutte binomiali con gli stessi parametri) si ha che il valore atteso della percentuale di studenti che passano l'esame è

$$\mathbb{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{S_i \geq i_0}}{N}\right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathbb{E}(\mathbb{1}_{S_i \geq i_0})}{N} = n\mathbb{P}(S \geq i_0) = \sum_{j=i_0}^{n} \binom{n}{i} \frac{(k-1)^i}{k^n}.$$

I risultati numerici sono: nel caso $n = 10$, $k = 4$ ed $i_0 = 1$

$$\mathbb{P}(S = 1) = 10\frac{3^9}{4^{10}} \approx 0.1877$$

$$\mathbb{P}(S \geq 1) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10} \approx 0.9437$$

$$\mathbb{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{S_i \geq i_0}}{N}\right) \approx 0.9437,$$

nel caso $n = 10$, $k = 4$ ed $i_0 = 6$

$$\mathbb{P}(S = 6) = \binom{10}{6} \frac{3^4}{4^{10}} \approx 0.016222$$

$$\mathbb{P}(S \geq 6) \approx 0.0197$$

$$\mathbb{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{S_i \geq i_0}}{N}\right) \approx 0.0197.$$

Soluzione esercizio 12.

Sia X la v.a. che indica il numero di chiamate telefoniche che arrivano al centralino al minuto. La v.a. X ha una distribuzione di Poisson con parametro $\lambda = 2.5$.

1. $P(X = 0) = \frac{e^{-2.5} 2.5^0}{0!} = e^{-2.5} = 0.08208;$
2. $P(X = 2) = \frac{e^{-2.5} 2.5^2}{2!} = 0.2565;$
3. $P(X \leq 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0.08208 + 0.2565 + \frac{e^{-2.5} 2.5^3}{3!} + \frac{e^{-2.5} 2.5^4}{4!} = 0.8911;$
4. $P(X > 6) = 1 - P(X \leq 6) = 1 - P(X \leq 4) - P(X = 5) - P(X = 6) = 1 - 0.8911 - \frac{e^{-2.5} 2.5^5}{5!} - \frac{e^{-2.5} 2.5^6}{6!} = 0.0142.$

Soluzione esercizio 13.

Osservazione: in generale se X è una variabile di Poisson di parametro λ relativa ad un'unità di misura (può essere un tempo, un'area ecc.), la variabile relativa ad α unità di misura ha una distribuzione di Poisson di parametro $\alpha\lambda$ (la giustificazione è nella teoria dei processi di Poisson e risiede nel fatto che ogni porzione disgiunta (di tempo, di spazio ecc.) è indipendente dalle altre e la loro distribuzione è poissoniana con parametro che dipende solo dalla loro estensione).

Sia X la v.a. che indica il numero di difetti in un foglio di 10 mq di metallo. La v.a. X ha una distribuzione di Poisson con parametro $\lambda = 5$. L'unità di area per la variabile X è 10 mq, ma vogliamo individuare il numero di errori in un'area di 15 mq. Sia Y la v.a. che indica il numero di difetti in un foglio di 15 mq di metallo, la quale ha una distribuzione di Poisson con parametro $\alpha = 5(1.5) = 7.5$. Perciò abbiamo

$$P(Y \geq 3) = 1 - P(Y < 3) = 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) - P(Y = 2) = .9797.$$

Soluzione esercizio 14.

Sia X la v.a. che indica il numero di errori per pagina. La v.a. X ha una distribuzione di Poisson, con parametro che possiamo calcolare usando il fatto che $P(X = 0) = 1 - 0.135 = 0.865 = e^{-\lambda}$, perciò $\lambda = 0.145$.

$$P(X = 1) = \frac{e^{-0.145}0.145^1}{1!} = 0.125.$$

Soluzione esercizio 15.

Sia X la v.a. che indica il numero di annegamenti accidentali negli USA su 100000 abitanti. La v.a. X ha una distribuzione di Poisson con parametro $\lambda = 3$. Siccome vogliamo calcolare delle probabilità riguardanti città con 200000 abitanti, definiamo Y come la v.a. che indica il numero di annegamenti accidentali negli USA su 200000 abitanti, la quale ha una distribuzione di Poisson con parametro $\alpha = 3 \times 2 = 6$.

1. $P(Y = 2) = \frac{e^{-6}6^2}{2!} = 0.04462$;
2. $P(Y < 3) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) = e^{-6} + e^{-6}6 + 0.04462 = 0.06197$

Soluzione esercizio 16.

Sia X la v.a. che indica il numero di particelle emesse in 1 secondo. La v.a. X ha una distribuzione di Poisson con parametro che possiamo calcolare usando il fatto che $P(X = 0) = 0.165 = e^{-\lambda}$, percio' $\lambda = 1.8018$.

1. Il numero atteso è dato dal valore del parametro perciò è 1.8018;

2. Siccome vogliamo considera un intervallo di 2 secondi, definiamo Y come la v.a. che indica il numero di particelle emesse in 2 secondi, la quale ha una distribuzione di Poisson con parametro $\alpha = 1.8018 \times 2 = 3.6036$, quindi $P(Y = 0) = e^{-3.6036} = 0.0273$;

3. Consideriamo un intervallo di 4 secondi percio' definiamo Y come la v.a. che indica il numero di particelle emesse in 4 secondi, la quale ha una distribuzione di Poisson con parametro $\alpha = 1.8018 \times 4 = 7.2072$, quindi

$$\begin{aligned} P(Y \leq 2) &= P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) \\ &= e^{-7.2072} + 7.2072e^{-7.2072} + \frac{e^{-7.2072}7.2072^2}{2} \\ &= 0.0253 \end{aligned}$$

Soluzione esercizio 17.

Ricordiamo che $X \sim \text{Poi}(\lambda)$ se e solo se $\mathbb{P}(X = i) = \exp(-\lambda)\lambda^i/i!$. Ricordiamo inoltre che se $X_1, \dots, X_n$ sono variabili di Poisson indipendenti di parametri $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ allora $X := \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Poi}(\sum_{i=1}^n \lambda_i$. Nel nostro caso $n = 10$ e $\lambda_i = 2$ per ogni i, pertanto $X \sim \text{Poi}(20)$.

1. $\mathbb{P}(X > 0) = 1 - \exp(-n\lambda) = 1 - \exp(-20) \approx 1$;

2. $\mathbb{E}(X) = n\lambda = 20$;

3. dall'indipendenza si ha che

$$\mathbb{P}(X_1 \geq 3 | X_2 \leq 2, \dots X_{10} \leq 2) = \mathbb{P}(X_1 \geq 3) = 1 - \exp(-2)(1+2+2) \approx 0.3233;$$

4. l'evento "lo sportello i è libero" è $A_i := \{X_i = 0\}$ con $\mathbb{P}(A_i) = \exp(-\lambda) = \exp(-2)$, pertanto il numero di sportelli liberi è $\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i} \sim \text{Bin}(n, 1 - \exp(-\lambda)) \equiv \text{Bin}(10, 1 - \exp(-2))$ da cui

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i} > 0\right) = 1 - (1 - \mathbb{P}(A_1))^{10} = 1 - (1 - \exp(-2))^{10} \approx 0.7664.$$