

Statistica Matematica A

MEC A-Z

Esercitatore: dott. F. Zucca

Esercitazione # 2

1 Distribuzione normale

Esercizio 1 Sia X una variabile aleatoria Normale $\mathcal{N}(5, 3)$. Facendo uso delle tavole:

1. si calcoli $P(|X - 5| < 1)$;
2. si stabilisca il valore α tale che $P(X < \alpha) = 0.7$
3. si calcoli $\text{Var}(2X - 3)$.

Esercizio 2 Una bilancia difettosa ha un errore sistematico di 0.1g ed un errore casuale che si suppone avere distribuzione Normale $\mathcal{N}(0, 4/25)$ (si osservi quindi che si possono avere anche risultati negativi!). Si sottopone alla misura un campione di 0.9g. Calcolare:

1. la probabilità che la misura dia un risultato compreso tra 0.8g e 1g;
2. la probabilità la misura dia un risultato superiore a 1g;
3. la probabilità che la misura dia un risultato minore, in valore assoluto, di 0.9g.

Esercizio 3 La durata in ore della lampadina “gran fulminata” (prodotta dalla ditta “bulbo incandescente”) segue una legge normale di media 2000 e varianza σ^2 . Se un compratore richiede che almeno il 90% di esse abbia una durata superiore alle 1500 ore, qual è il valore massimo che σ può assumere per soddisfare l'esigenza dell'acquirente?

Esercizio 4 Un operatore, in attesa dell'apertura del mercato azionario, decide di comperare un pacchetto di azioni se la differenza tra il prezzo di apertura e quello di chiusura della sera precedente è compreso tra a e b ($a < b$, con $a, b \in \mathbb{R}$). supponendo che la variazione di prezzo segua una legge normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, qual è il valore di σ in corrispondenza del quale si ha la massima probabilità di comperare?

Esercizio 5 *L'altezza di una data popolazione maschile di età compresa tra i 18 ed i 25 anni segue una distribuzione normale.*

1. *Se l'altezza media fosse 165cm ed esattamente il 5.48% della popolazione fosse più basso di 158cm, quale percentuale della popolazione avrebbe un'altezza superiore a 174cm?*
2. *Se il primo quartile dell'altezza fosse 160cm ed il 90° percentile fosse 184cm, quanto varrebbero la media e la deviazione standard?*

Esercizio 6 *Il tempo necessario ad Adalberto per coprire il percorso casa-ufficio è una variabile aleatoria di legge normale. Se il tempo medio è di 30 minuti e la probabilità di coprire il percorso in più di 40 minuti è 0.1, quanto vale la probabilità di coprire il percorso in più di 50 minuti?*

2 Distribuzioni congiunte - indipendenza

Esercizio 7 *(es. 3.54 Montgomery - modificato)*

Due venditori indipendenti, le ditte “Argilla Imbevuta” e “Sbricioloni”, forniscono il famoso cemento “Rapid-Trap” ad un appaltatore di autostrade. Grazie all'esperienza precedente, si sa che la resistenza alla compressione di provini in cemento può essere modellato da una distribuzione normale con media $\mu_1 = 6000 \text{ Kg/cm}^2$ e deviazione standard $\sigma_1 = 100 \text{ Kg/cm}^2$ per quello della “Argilla Impastata” e $\mu_2 = 5825 \text{ Kg/cm}^2$ e deviazione standard $\sigma_2 = 90 \text{ Kg/cm}^2$ per quello della “Sbricioloni”.

1. *Qual è la probabilità che entrambi i venditori forniscano una partita di cemento con resistenza compresa tra 5800 e 6050 Kg/cm^2 ?*
2. *Quanto vale la probabilità che le resistenze del cemento di entrambi i venditori siano inferiori a 6100?*

Esercizio 8 *La fabbrica “Rust Into Rust” che fornisce le FS costruisce rotaie la cui lunghezza segue una legge normale $N(9.99, 1/10000)$ (dove la media è in metri e la varianza in metri²). Determinare:*

1. *la probabilità che una rotaia sia più lunga di 10m;*
2. *la probabilità che 101 rotaie siano più lunghe di 1Km;*
3. *la probabilità che esattamente 101 rotaie siano necessarie per coprire 1Km;*
4. *la lunghezza x affinché la percentuale di rotaie con lunghezza non superiore a x sia il 10%;*
5. *come si deve modificare la lunghezza media affinché la percentuale di rotaie con lunghezza superiore a 10m sia il 40%?*

3 Affidabilità

Esercizio 9 Un'apparecchiatura elettronica A è composta da tre microchips M_1 , M_2 e M_3 . Le affidabilità di ciascun microchip, ovvero le probabilità che ciascun microchip funzioni correttamente, sono $a_1 = 0.95$, $a_2 = 0.99$, $a_3 = 0.7$. I microchips M_2 e M_3 sono collegati in parallelo a formare un unico componente C_2 (quindi C_2 funziona quando funziona almeno uno dei due microchips), il quale è collegato in serie con M_1 (quindi A funziona quando funzionano tutti e due i suoi componenti M_1 e C_2). Qual è l'affidabilità dell'intera apparecchiatura A ?

Esercizio 10 Un'apparecchiatura è composta da 2 sottoinsiemi di tipo M che operano in parallelo. Ogni sottosistema M è costituito da 2 componenti che operano in serie ed ogni componente ha affidabilità pari a 0.9.

1. Si determini l'affidabilità dell'apparecchiatura.
2. Di quanti sottosistemi di tipo M collegati in parallelo dovrebbe essere composta l'apparecchiatura affinché la sua affidabilità sia almeno 0.99?

Esercizio 11 La ditta "F.lli Amanuensi" che stampa e rilega libri possiede 3 macchine per la stampa delle pagine, ognuna di affidabilità 0.7, ed una macchina per la rilegatura di affidabilità 0.8.

1. Rappresentare la situazione con un grafico e calcolare l'affidabilità del sistema.
2. Alla ditta viene proposto l'acquisto di una certa macchina di affidabilità p che stampa e rilega. Quanto deve valere p perché, con l'acquisto di tale macchina, l'affidabilità totale del sistema sia almeno 0.95?

4 Svolgimenti

Soluzione esercizio 1.

1. $P(|X - 5| < 1) = P(-1 < X - 5 < 1) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - 1 = 0.438$

dove Φ rappresenta la funzione di distribuzione cumulata della normale standard.

2. $P(X < \alpha) = \Phi\left(\frac{\alpha-5}{\sqrt{3}}\right) = 0.7$. Dalle tavole si deduce che $\frac{\alpha-5}{\sqrt{3}} = 0.5244$ e quindi $\alpha = 5.9$

3. $\text{Var}(2X - 3) = 4 \cdot \text{Var}(X) = 12$

Soluzione esercizio 2.

Indichiamo con X l'errore casuale e con M la misura del nostro campione. Quindi $X \sim \mathcal{N}(0, 4/25)$, $5X/2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ e $M = X + 0.1 + 0.9 = X + 1$.

1. $P(0.8 \leq M \leq 1) = P(-0.2 \leq X \leq 0) = P(-\frac{1}{2} \leq \frac{5}{2}X \leq 0) = \Phi(0) - \Phi(-0.5) = \Phi(0.5) - 0.5 = 0.1915$ (si ricordi che $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$).
2. $M \leq 1$ se e solo se $X \leq 0$ quindi $P(M \leq 1) = P(X \leq 0) = 1/2$.
3. $|X + 1| \leq 9/10$ se e solo se $X \in [-19/10; -1/10]$, pertanto $P(X \in [-19/10; -1/10]) = P(5X/2 \in [-19/4; -1/4]) = \Phi(19/4) - \Phi(1/4) = 1 - 0.5987 = 0.4013$.

Soluzione esercizio 3.

Sia X la durata di una lampadina. L'acquirente richiede che $0.9 \leq P(X \geq 1500) = 1 - \Phi(-500/\sigma)$. Pertanto si richiede che $\Phi(500/\sigma) \geq 0.9$ ovvero $500/\sigma \geq 1.2816$. Quindi $\sigma \leq 500/1.2816 = 390.137$.

Soluzione esercizio 4.

Sia X la differenza di quotazione, $P(X \in [a, b]) = f(\sigma)$, dove, dopo un cambio di variabile

$$f(\sigma) = \int_{a/\sigma}^{b/\sigma} \frac{\exp(-s^2/2)}{\sqrt{2\pi}} ds.$$

Calcolando la derivata f' e studiando la funzione in $(0, +\infty)$ si trova immediatamente che

a) se $a \leq 0 \leq b$ ($a < b$) allora f è decrescente, pertanto minore è σ maggiore è la probabilità che $X \in [a, b]$ (ed il limite per σ che tende a 0^+ di tale valore è 1);

b) se $0 < a < b$ allora si trova che f è decrescente in $(\sqrt{(b^2 - a^2)/(2 \ln(b/a))}; +\infty)$ e crescente in $(0; \sqrt{(b^2 - a^2)/(2 \ln(b/a))})$, pertanto il massimo è assunto in $\sigma^2 = (b^2 - a^2)/(2 \ln(b/a))$.

c) se $a < b < 0$, utilizzando la parità ed il punto precedente si ha che il massimo è assunto in $\sigma^2 = (a^2 - b^2)/(2 \ln(a/b))$.

Soluzione esercizio 5.

Ricordiamo che $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ implica $(X - \mu)/\sigma \sim \mathcal{N}(0, 1)$ e che, se U_X è la funzione dei quantili di X allora $U_X = \mu + \sigma q$ (dove q è la funzione dei quantili della distribuzione $\mathcal{N}(0, 1)$). Si ricordi inoltre che $q(\alpha) = -q(1 - \alpha)$.

a) Sappiamo che $\mu = 165$ e che $0.0548 = \mathbb{P}(X \leq 158) = \Phi((158 - \mu)/\sigma) = \Phi(-7/\sigma)$, pertanto $\sigma = -7/q(0.0548) = 7/q(0.9452) \approx 7/1.6 = 4.375$. Da cui $\mathbb{P}(X > 174) = 1 - \Phi((174 - \mu)/\sigma) = 1 - \Phi(2.0571) = 1 - 0.9802 = 0.0198$.

b) Se $160 = U_X(1/4) = \mu + \sigma q(1/4)$, $184 = U_X(9/10) = \mu + \sigma q(9/10)$ allora $\sigma = (184 - 160)/(q(9/10) - q(1/4)) \approx 24/(1.2816 - 0.6745) = 12.2693$, mentre $\mu = (160q(9/10) - 184q(1/4))/(q(9/10) - q(1/4)) \approx 329.1544/1.956 = 168.2758$.

Soluzione esercizio 6.

$1/10 = \mathbb{P}(X > 40) = 1 - \phi((40 - 30)/\sigma)$ pertanto $\sigma = 10/q(9/10) \approx 10/1.2816 = 7.8027$. Da cui $P(X > 50) \approx 1 - \phi(20/7.8027) = 1 - \phi(2.5632) = 1 - 0.9948 = 0.0052$.

Soluzione esercizio 7.

Indichiamo con X_1 e con X_2 la resistenza del cemento prodotto dal venditore 1 e dal 2, rispettivamente.

1. Siccome X_1 e X_2 sono indipendenti, allora

$$\begin{aligned} P(5800 \leq X_1 \leq 6050; 5800 \leq X_2 \leq 6050) &= \\ &= P(5800 \leq X_1 \leq 6050) P(5800 \leq X_2 \leq 6050) = \\ &= [\phi(0.5) - \phi(-2)] [\phi(\frac{225}{90}) - \phi(-\frac{25}{90})] = \\ &= [\phi(0.5) - 1 + \phi(2)] [\phi(\frac{225}{90}) - 1 + \phi(\frac{25}{90})] = \\ &= (0.6915 - 1 + 0.9772)(0.9938 - 1 + 0.6103) = 0.40 \end{aligned}$$

2. Siccome X_1 e X_2 sono indipendenti, allora $P(X_1 < 6100; X_2 < 6100) = P(X_1 < 6100) P(X_2 < 6100) = \dots = 0.84$, quindi non è possibile che la probabilità richiesta nel punto (2) sia pari al 92%.

Soluzione esercizio 8.

Sia X la misura di una rotaia.

1. $P(X > 10) = 1 - \phi((10 - 9.99)/0.01) = 1 - \phi(1) = 1 - 0.8143 = 0.1857$
2. Se $\{X_i\}_{i=1, \dots, 101}$ sono le misure (indipendenti ed identicamente distribuite) delle 101 rotaie, allora $\sum_{i=1}^{101} X_i \sim \mathcal{N}(101 \cdot 9.99, 101 \cdot (1/10000))$, pertanto $P\left(\sum_{i=1}^{101} X_i > 1000\right) = 1 - \phi((1000 - 9.99 \cdot 101)/\sqrt{0.0101}) = 1 - \phi(-89.9/\sqrt{1.01}) \cong 1$
3. sebbene un calcolo esatto di questo tipo coinvolgerebbe una convoluzione, in questo specifico caso possiamo stimare la probabilità in questo modo: sia A "le prime 100 rotaie non bastano a coprire 1Km" e B "le 101 rotaie bastano a coprire 1Km". quello che dobbiamo calcolare è $P(A \cap B)$ cioè $P(A) - P(A \cap B^c) \geq P(A) - P(B^c)$. Siccome $\sum_{i=1}^{100} X_i \sim \mathcal{N}(100 \cdot 9.99, 100 \cdot (1/10000))$, pertanto $P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i > 1000\right) = 1 - \phi(1/0.1) = 1 - \phi(10) \cong 0$. Quindi $P(A) - P(A \cap B^c) \geq P(A) - P(B^c) \cong 1$. (Si osservi che, essendo variabili normali, le lunghezze non sono necessariamente positive e quindi B^c non è contenuto in A , anche nel nostro caso la probabilità dell'evento $B^c \cap A^c$ è prossima a 0).

4. $P(X \leq x) = 0.1$ ovvero $\phi((x - 9.99) / (1/100)) = 0.1$. Quindi $x = 9.9887$.
5. $1 - \phi\left(\frac{10-\mu}{0.01}\right) = 0.4$ quindi $\phi(1000 - 100\mu) = 0.6$. Quindi $1000 - 100\mu = 0.2533$ ovvero $\mu = 10 - 0.002533 = 9.997467$.

Soluzione esercizio 9.

$$\begin{aligned} a^{C_2} &= P(C_2 \text{ funzioni}) = 1 - P(C_2 \text{ non funzioni}) = \\ &= 1 - P(M_2 \text{ e } M_3 \text{ non funzionano}) = 1 - (1 - 0.99)(1 - 0.7) = 0.997 \\ a_{totale} &= a^{C_2} \cdot a_1 = 0.997 \cdot 0.95 = 0.9497 \end{aligned}$$

Soluzione esercizio 10.

1. Chiamiamo M_1 e M_2 i due sottoinsiemi di tipo M in parallelo che formano l'apparecchiatura. Allora:

$$a^{M_1} = a^{M_2} = 0.9 \cdot 0.9 = 0.81$$

quindi l'affidabilità totale dell'apparecchiatura:

$$a_{totale} = 1 - (1 - 0.81) \cdot (1 - 0.81) = 0.9639$$

2. Chiamiamo n il numero di sottoinsiemi M collegati in parallelo e S il nuovo sistema.

Quindi l'affidabilità di S è data da:

$$a_S = 1 - (1 - a_M)^n = 1 - (0.19)^n$$

Dobbiamo allora determinare n tale che $1 - (0.19)^n \geq 0.99$. Si trova che $n \geq \log(0.01) / \log(0.19) \approx 2.773$ pertanto $n \geq 3$.

Soluzione esercizio 11.

1. $a_{stampa} = 1 - (0.3)^3 = 0.973$

$$a_{totale} = a_{stampa} \cdot a_{rilegatura} = 0.973 \cdot 0.8 = 0.7784$$

2. b) p deve soddisfare

$$\begin{aligned} 1 - (1 - 0.7784)(1 - p) &\geq 0.95 \\ (1 - 0.7784)(1 - p) &\leq 0.05 \\ 1 - p &\leq 0.2256 \end{aligned}$$

quindi $p \geq 0.7744$.