Statistica Matematica A

MEC A-Z

Esercitatore: dott. F. Zucca

Esercitazione # 2

1 Distribuzione normale

Esercizio 1 *Sia X una variabile aleatoria Normale $\mathcal{N}(5,3)$. Facendo uso delle tavole:*

1. *si calcoli $P(|X-5|<1)$;*
2. *si stabilisca il valore α tale che $P(X<\alpha)=0.7$*
3. *si calcoli $Var(2X-3)$.*

Esercizio 2 *Una bilancia difettosa ha un errore sistematico di 0.1g ed un errore casuale che si suppone avere distribuzione Normale $\mathcal{N}(0,4/25)$ (si osservi quindi che si possono avere anche risultati negativi!). Si sottopone alla misura un campione di 0.9g. Calcolare:*

1. *la probabilità che la misura dia un risultato compreso tra 0.8g e 1g;*
2. *la probabilità la misura dia un risultato superiore a 1g;*
3. *la probabilità che la misura dia un risultato minore, in valore assoluto, di 0.9g.*

Esercizio 3 *La durata in ore della lampadina "gran fulminata" (prodotta dalla ditta "bulbo incandescente") segue una legge normale di media 2000 e varianza σ^2. Se un compratore richiede che almeno il 90% di esse abbia una durata superiore alle 1500 ore, qual è il valore massimo che σ può assumere per soddisfare l'esigenza dell'acquirente?*

Esercizio 4 *Un operatore, in attesa dell'apertura del mercato azionario, decide di comperare un pacchetto di azioni se la differenza tra il prezzo di apertura e quello di chiusura della sera precedente è compreso tra a e b ($a<b$, con $a,b\in\mathbb{R}$). supponendo che la variazione di prezzo segua una legge normale $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, qual è il vaolre di σ in corrispondenza del quale si ha la massima probabilità di comperare?*

Esercizio 5 *L'altezza di una data popolazione maschile di età compresa tra i 18 ed i 25 anni segue una distribuzione normale.*

1. *Se l'altezza media fosse 165cm ed esattamente il* 5.48% *della popolazione fosse più basso di 158cm, quale percentuale della popolazione avrebbe un'altezza superiore a 174cm?*
2. *Se il primo quartile dell'altezza fosse 160cm ed il* 90^o *percentile fosse 184cm, quanto varrebbero la media e la deviazione standard?*

Esercizio 6 *Il tempo necessario ad Adalberto per coprire il percorso casa-ufficio è una variabile aleatoria di legge normale. Se il tempo medio è di 30 minuti e la probabilità di coprire il percorso in più di 40 minuti è 0.1, quanto vale la probabilità di coprire il percorso in più di 50 minuti?*

2 Distribuzioni congiunte - indipendenza

Esercizio 7 *(es. 3.54 Montgomery - modificato)*

Due venditori indipendenti, le ditte "Argilla Imbevuta" e "Sbricioloni", forniscono il famoso cemento "Rapid-Trap" ad un appaltatore di autostrade. Grazie all'esperienza precedente, si sa che la resistenza alla compressione di provini in cemento può essere modellato da una distribuzione normale con media $\mu_1 = 6000$ *Kg/cm*^{2} *e deviazone standard* $\sigma_1 = 100$ *Kg/cm*^{2} *per quello della "Argilla Impastata" e* $\mu_2 = 5825$ *Kg/cm*^{2} *e deviazone standard* $\sigma_2 = 90$ *Kg/cm*^{2} *per quello della "Sbricioloni".*

1. *Qual è la probabilità che entrambi i venditori forniscano una partita di cemento con resistenza compresa tra 5800 e 6050 Kg/cm*^{2} *?*
2. *Quanto vale la probabilità che le resistenze del cemento di entrambi i venditori siano inferiori a 6100?*

Esercizio 8 *La fabbrica "Rust Into Rust" che fornisce le FS costruisce rotaie la cui lunghezza segue una legge normale* $\mathcal{N}(9.99, 1/10000)$ *(dove la media è in metri e la varianza in metri*^{2}*). Determinare:*

1. *la probabilità che una rotaia sia più lunga di 10m;*
2. *la probabilità che 101 rotaie siano più lunghe di 1Km;*
3. *la probabilità che esattamente 101 rotaie siano necessarie per coprire 1Km;*
4. *la lunghezza* x *affinché la percentuale di rotaie con lunghezza non superiore a* x *sia il 10%;*
5. *come si deve modificare la lunghezza media affinché la percentuale di rotaie con lunghezza superiore a 10m sia il 40%?*

3 Affidabilità

Esercizio 9 *Un'apparecchiatura elettronica A è composta da tre microchips M_1, M_2 e M_3. Le affidabilità di ciascun microchip, ovvero le probabilità che ciascun microchip funzioni correttamente, sono $a_1 = 0.95$, $a_2 = 0.99$, $a_3 = 0.7$. I microchips M_2 e M_3 sono collegati in parallelo a formare un unico componente C_2 (quindi C_2 funziona quando funziona almeno uno dei due microchips), il quale è collegato in serie con M_1 (quindi A funziona quando funzionano tutti e due i suoi componenti M_1 e C_2). Qual è l'affidabilità dell'intera apparecchiatura A?*

Esercizio 10 *Un'apparecchiatura è composta da 2 sottoinsiemi di tipo M che operano in parallelo. Ogni sottosistema M è costituito da 2 componenti che operano in serie ed ogni componente ha affidabilità pari a* 0.9.

1. *Si determini l'affidabilità dell'apparecchiatura.*
2. *Di quanti sottosistemi di tipo M collegati in parallelo dovrebbe essere composta l'apparecchiatura affinché la sua affidabilità sia almeno 0.99?*

Esercizio 11 *La ditta "F.lli Amanuensi" che stampa e rilega libri possiede 3 macchine per la stampa delle pagine, ognuna di affidabilità 0.7, ed una macchina per la rilegatura di affidabilità 0.8.*

1. *Rappresentare la situazione con un grafico e calcolare l'affidabilità del sistema.*
2. *Alla ditta viene proposto l'acquisto di una certa macchina di affidabilità p che stampa e rilega. Quanto deve valere p perché, con l'acquisto di tale macchina, l'affidabiità totale del sistema sia almeno 0.95?*

4 Svolgimenti

Soluzione esercizio 1.

1. $P(|X-5|<1) = P(-1<X-5<1) = \phi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \phi\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2\phi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - 1 = 0.438$

   dove ϕ rappresenta la funzione di distribuzione cumulata della normale standard.
2. $P(X<\alpha) = \phi\left(\frac{\alpha-5}{\sqrt{3}}\right) = 0.7$. *Dalle tavole si deduce che* $\frac{\alpha-5}{\sqrt{3}} = 0.5244$ *e quindi* $\alpha = 5.9$

3. $Var(2X-3) = 4 \cdot Var(X) = 12$

Soluzione esercizio 2.

Indichiamo con X l'errore casuale e con M la misura del nostro campione. Quindi $X \sim \mathcal{N}(0, 4/25)$, $5X/2 \sim \mathcal{N}(0,1)$ e $M = X + 0.1 + 0.9 = X + 1$.

1. $P(0.8 \leq M \leq 1) = P(-0.2 \leq X \leq 0) = P\left(-\frac{1}{2} \leq \frac{5}{2}X \leq 0\right) = \phi(0) - \phi(-0.5) = \phi(0.5) - 0.5 = 0.1915$ *(si ricordi che $\phi(x) + \phi(-x) = 1$).*
2. $M \leq 1$ *se e solo se* $X \leq 0$ *quindi* $P(M \leq 1) = P(X \leq 0) = 1/2$.
3. $|X+1| \leq 9/10$ *se e solo se* $X \in [-19/10; -1/10]$, *pertanto* $P(X \in [-19/10; -1/10]) = P(5X/2 \in [-19/4; -1/4]) = \phi(19/4) - \phi(1/4) = 1 - 0.5987 = 0.4013$.

Soluzione esercizio 3.
Sia X la durata di una lampadina. L'acquirente richiede che $0.9 \leq P(X \geq 1500) = 1 - \phi(-500/\sigma)$. *Pertanto si richiede che* $\phi(500/\sigma) \geq 0.9$ *ovvero* $500/\sigma \geq 1.2816$. *Quindi* $\sigma \leq 500/1.2816 = 390.137$.

Soluzione esercizio 4.
Sia X la differenza di quotazione, $P(X \in [a,b]) = f(\sigma)$, dove, dopo un cambio di variabile

$$f(\sigma) = \int_{a/\sigma}^{b/\sigma} \frac{\exp\left(-s^2/2\right)}{\sqrt{2\pi}} ds.$$

Calcolando la derivata f' e studiando la funzione in $(0, +\infty)$ si trova immediatamente che

a) se $a \leq 0 \leq b$ ($a < b$) allora f è decrescente, pertanto minore è σ maggiore è la probabilità che $X \in [a,b]$ (ed il limite per σ che tende a 0^+ di tale valore è 1);

b) se $0 < a < b$ allora si trova che f è decrescente in $\left(\sqrt{(b^2-a^2)/(2\ln(b/a))}; +\infty\right)$ e crescente in $\left(0; \sqrt{(b^2-a^2)/(2\ln(b/a))}\right)$, pertanto il massimo è assunto in $\sigma^2 = \left(b^2-a^2\right)/(2\ln(b/a))$.

c) se $a < b < 0$, utilizzando la parità ed il punto precedente si ha che il massimo è assunto in $\sigma^2 = \left(a^2-b^2\right)/(2\ln(a/b))$.

Soluzione esercizio 5.
Ricordiamo che $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ implica $(X-\mu)/\sigma \sim \mathcal{N}(0,1)$ e che, se U_X è la funzione dei quantili di X allora $U_X = \mu + \sigma q$ (dove q è la funzione dei quantili della distribuzione $\mathcal{N}(0,1)$. Si ricordi inoltre che $q(\alpha) = -q(1-\alpha)$.

a) Sappiamo che $\mu = 165$ e che $0.0548 = \mathbb{P}(X \leq 158) = \phi((158-\mu)/\sigma)) = \phi(-7/\sigma)$, *pertanto* $\sigma = -7/q(0.0548) = 7/q(0.9452) \approx 7/1.6 = 4.375$. *Da cui* $\mathbb{P}(X > 174) = 1 - \phi((174-\mu)/\sigma) = 1 - \phi(2.0571) = 1 - 0.9802 = 0.0198$.

b) Se $160 = U_X(1/4) = \mu + \sigma q(1/4)$, $184 = U_X(9/10) = \mu + \sigma q(9/10)$ *allora* $\sigma = (184-160)/(q(9/10)-q(1/4)) \approx 24/(1.2816-0.6745) = 12.2693$, *mentre* $\mu = (160q(9/10) - 184q(1/4))/(q(9/10)-q(1/4)) \approx 329.1544/1.956 = 168.2758$.

Soluzione esercizio 6.
$1/10 = \mathbb{P}(X > 40) = 1-\phi((40-30)/\sigma)$ *pertanto* $\sigma = 10/q(9/10) \approx 10/1.2816 = 7.8027$. *Da cui* $P(X > 50) \approx 1 - \phi(20/7.8027) = 1 - \phi(2.5632) = 1 - 0.9948 = 0.0052$.

Soluzione esercizio 7.
Indichiamo con X_1 *e con* X_2 *la resistenza del cemento prodotto dal venditore 1 e dal 2, rsipettivamente.*

1. *Siccome* X_1 *e* X_2 *sono indipendenti, allora*
$$P(5800 \leq X_1 \leq 6050; 5800 \leq X_2 \leq 6050) =$$
$$= P(5800 \leq X_1 \leq 6050)\, P(5800 \leq X_2 \leq 6050) =$$
$$= [\phi(0.5) - \phi(-2)]\left[\phi\left(\tfrac{225}{90}\right) - \phi\left(-\tfrac{25}{90}\right)\right] =$$
$$= [\phi(0.5) - 1 + \phi(2)]\left[\phi\left(\tfrac{225}{90}\right) - 1 + \phi\left(\tfrac{25}{90}\right)\right] =$$
$$= (0.6915 - 1 + 0.9772)(0.9938 - 1 + 0.6103) = 0.40$$

2. *Siccome* X_1 *e* X_2 *sono indipendenti, allora* $P(X_1 < 6100; X_2 < 6100) = P(X_1 < 6100)\, P(X_2 < 6100) = ... = 0.84$, *quindi non è possibile che la probabilità richiesta nel punto (2) sia pari al 92%.*

Soluzione esercizio 8.
Sia X *la misura di una rotaia.*

1. $P(X > 10) = 1 - \phi((10 - 9.99)/0.01) = 1 - \phi(1) = 1 - 0.8143 = 0.1857$
2. *Se* $\{X_i\}_{i=1,...,101}$ *sono le misure (indipendenti ed identicamente distribuite) delle 101 rotaie, allora* $\sum_{i=1}^{101} X_i \sim \mathcal{N}(101 \cdot 9.99, 101 \cdot (1/10000))$, *pertanto*
$$P\left(\sum_{i=1}^{101} X_i > 1000\right) = 1 - \phi\left((1000 - 9.99 \cdot 101)/\sqrt{0.0101}\right) =$$
$$= 1 - \phi\left(-89.9/\sqrt{1.01}\right) \cong 1$$
3. *sebbene un calcolo esatto di questo tipo coinvolgerebbe una convoluzione, in questo specifico caso possiamo stimare la probabilità in questo modo: sia A "le prime 100 rotaie non bastano a coprire 1Km" e B " le 101 rotaie bastano a coprire 1Km". quello che dobbiamo calcolare è* $P(A \cap B)$ *cioè* $P(A) - P(A \cap B^c) \geq P(A) - P(B^c)$. *Siccome* $\sum_{i=1}^{100} X_i \sim \mathcal{N}(100 \cdot 9.99, 100 \cdot (1/10000))$, *pertanto* $P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i > 1000\right) = 1 - \phi(1/0.1) = 1 - \phi(10) \cong 0$. *Quindi* $P(A) - P(A \cap B^c) \geq P(A) - P(B^c) \cong 1$. *(Si osservi che, essendo variabili normali, le lunghezze non sono necessariamente positive e quindi* B^c *non è contenuto in A, anche nel nostro caso la probabilità dell'evento* $B^c \cap A^c$ *è prossima a 0).*

4. $P(X \leq x) = 0.1$ *ovvero* $\phi((x - 9.99)/(1/100)) = 0.1$. *Quindi* $x = 9.9887$.

5. $1 - \phi\left(\frac{10-\mu}{0.01}\right) = 0.4$ *quindi* $\phi(1000 - 100\mu) = 0.6$. *Quindi* $1000 - 100\mu = 0.2533$ *ovvero* $\mu = 10 - 0.002533 = 9.997467$.

Soluzione esercizio 9.

$a^{C_2} = P(C_2 \text{ funzioni}) = 1 - P(C_2 \text{ non funzioni}) =$
$= 1 - P(M_2 \text{ e } M_3 \text{ non funzionano}) = 1 - (1 - 0.99)(1 - 0.7) = 0.997$

$a_{totale} = a^{C_2} \cdot a_1 = 0.997 \cdot 0.95 = 0.9497$

Soluzione esercizio 10.

1. *Chiamiamo* M_1 *e* M_2 *i due sottoinsiemi di tipo M in parallelo che formano l'apparecchiatura. Allora:*

$$a^{M_1} = a^{M_2} = 0.9 \cdot 0.9 = 0.81$$

quindi l'affidabilità totale dell'apparecchiatura:

$$a_{totale} = 1 - (1 - 0.81) \cdot (1 - 0.81) = 0.9639$$

2. *Chiamiamo n il numero di sottoinsiemi M collegati in parallelo e S il nuovo sistema.*

Quindi l'affidabilità di S è data da:

$$a_S = 1 - (1 - a_M)^n = 1 - (0.19)^n$$

Dobbiamo allora determinare n tale che $1 - (0.19)^n \geq 0.99$. *Si trova che* $n \geq \log(0.01)/\log(0.19) \approx 2.773$ *pertanto* $n \geq 3$.

Soluzione esercizio 11.

1. $a_{stampa} = 1 - (0.3)^3 = 0.973$
$a_{totale} = a_{stampa} \cdot a_{rilegatura} = 0.973 \cdot 0.8 = 0.7784$

2. *b) p deve soddisfare*

$$\begin{aligned} 1 - (1 - 0.7784)(1 - p) &\geq 0.95 \\ (1 - 0.7784)(1 - p) &\leq 0.05 \\ 1 - p &\leq 0.2256 \end{aligned}$$

quindi $p \geq 0.7744$.