Statistica Matematica - Ing. Meccanica
I prova in itinere - 28 aprile 2004

Docenti: Proff. Lorenzo Zambotti, Fabio Zucca

Esercizio # 1

Il numero di lettere minatorie ricevute dal gruppo "*Stonati per caso*" il giorno dopo un loro "concerto" del recente tour *Cacofonik* è descritto dalla seguente tabella

Numero lettere	Frequenza relativa osservata
0	0.05
1–2	0.15
3–6	0.4
7–10	0.3
11-16	0.1

dove la frequenza osservata è da intendersi come la percentuale di giorni su un campione di ampiezza molto ampia (non nota).

1. Si calcolino la media, la varianza e si determini a quale classe appartiene la mediana.
2. Si completi la tabella indicando la frequenza relativa cumulativa.
3. Si stimi la probabilità che in una serata il gruppo riceva almeno 7 lettere minatorie.
4. I componenti del gruppo hanno deciso di chiudere la loro carriera nel caso in cui in ciascuna delle tre serate previste nella prossima settimana ricevano almeno 7 lettere minatorie. Si stimi la probabilità che (finalmente) si ritirino dalle scene entro 7 giorni.

Soluzione Esercizio # 1

Il numero di lettere minatorie giunte dopo un concerto può essere descritto come una variabile aleatoria X che assume i valori $\{x_i :=$ punto medio della classe $i\}$ con probabilità uguale alla frequenza relativa osservata f_i. Quindi:

$$\mathbb{P}(X = 0) = 0,05, \quad \mathbb{P}(X = 1,5) = 0,15, \quad \mathbb{P}(X = 4,5) = 0,4,$$

$$\mathbb{P}(X = 8,5) = 0,3, \quad \mathbb{P}(X = 13,5) = 0,1.$$

1. La media e la varianza di X sono:

$$E(X) = \sum_i x_i f_i = 0 \cdot 0,05 + 1.5 \cdot 0.15 + 4.5 \cdot 0.4 + 8.5 \cdot 0.3 + 13.5 \cdot 0.1 = 5.925$$

$$V(X) = \sum_i x_i^2 f_i - (E(X))^2 =$$

$$= 0^2 \cdot 0,05 + (1.5)^2 \cdot 0.15 + (4.5)^2 \cdot 0.4 + (8.5)^2 \cdot 0.3 + (13.5)^2 \cdot 0.1 - (5.925)^2$$

$$= 13.23.$$

2. Scrivendo le frequenze relative cumulative:

Numero lettere	Frequenza rel.	Frequenza rel. cumulativa
0	0.05	0.05
1–2	0.15	0.2
3–6	0.4	0.6
7–10	0.3	0.9
11-16	0.1	1

   troviamo anche che la mediana appartiene alla classe 3-6.

3. La probabilità richiesta si stima con $\mathbb{P}(X \geq 7) = 0.3 + 0.1 = 0.4$.

4. Poiché sono previste 3 serate, allora la probabilità che nei prossimi 7 giorni il gruppo si ritiri è $(0.4)^3 = 0.064$.

Esercizio # 2

Sia $a \in (0, 1)$ l'affidabilità di un tipo di neon. Decidiamo di disporre 4 di tali neon all'interno di un magazzino, ma siamo indecisi tra due alternative: due gruppi in serie, ciascuno composto da due neon in parallelo, oppure due file in parallelo, ciascuna composta da due neon in serie. Calcolare l'affidabilità di entrambi i sistemi. Quale scelta è più conveniente?

Soluzione Esercizio # 2

Le prima configurazione ha un'affidabilità pari a

$$A = (1 - (1 - a)^2)^2 = a^2(2 - a)^2$$

mentre la seconda ha un'affidabilità

$$B = 1 - (1 - a^2)^2 = a^2(2 - a^2).$$

Pertanto

$$A - B = a^2(4 - 4a + a^2 - 2 + a^2) = 2a^2(a - 1)^2 > 0, \qquad \forall a \in (0, 1)$$

da cui si evince che la miglior configurazione, in termini di affidabilità, è la prima per ogni valore di $a \in (0,1)$.

Esercizio # 3

Il numero di detenuti che arrivano al penitenziario di "Lovely Bloody Pals" in una giornata è descritto da una variabile di Poisson di parametro 3. Supponendo ogni giorno indipendente dagli altri si determini

1. la probabilità che in un giorno arrivi almeno un detenuto;
2. la probabilità che per 4 giorni consecutivi arrivi almeno un detenuto (almeno uno in ciascuno dei 4 giorni);
3. la probabilità che in 2 giorni su 4 arrivi almeno un detenuto.

Soluzione Esercizio # 3

Il numero di detenuti arrivati in un giorno è approssimabile con una variabile di Poisson X di parametro 3.

1. $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - e^{-3} = 0.95$.
2. La probabilità richiesta è, per l'indipendenza dei 4 giorni, uguale a $(\mathbb{P}(X \geq 1))^4 = (0.95)^4 = 0.814$.
3. Il numero di giorni su 4 in cui arriva almeno un detenuto è una variabile binomiale Y con parametri $n = 4$ e $p = 0.95$. Quindi:
$$\mathbb{P}(Y = 2) = \binom{4}{2}(0.95)^2(1 - 0.95)^{4-2} = 0.013.$$

Esercizio # 4

Si consideri la seguente famiglia di funzioni

$$\rho_c(x) := \begin{cases} c\left(x^2 + \dfrac{c}{6}\right) & x \in (-1,1) \\ 0 & |x| \geq 1. \end{cases}$$

1. Determinare l'*unico* valore $c_0 \in \mathbb{R}$ affinché ρ_{c_0} rappresenti una densità di probabilità e si tracci il grafico di ρ_{c_0}.
2. Sia X una variabile aleatoria avente ρ_{c_0} come densità: si calcolino media, varianza e funzione di ripartizione di X.
3. Calcolare $\mathbb{P}(X \geq 0)$.

Soluzione Esercizio # 4

1. Una densità di probabilità ρ deve soddisfare due proprietà:

$$\rho \geq 0, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)\, dx = 1.$$

Troviamo i c per cui è soddisfatta la seconda proprietà:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_c(x)\, dx = \int_{-1}^{1} c\left(x^2 + \frac{c}{6}\right) dx = c\left[\frac{x^3}{3} + \frac{cx}{6}\right]_{-1}^{1} = \frac{2c}{3} + \frac{c^2}{3}.$$

Dunque c deve soddisfare:

$$\frac{2c}{3} + \frac{c^2}{3} = 1 \;\Leftrightarrow\; c^2 + 2c - 3 = 0,$$

e questa equazione ha due soluzioni, $c = 1$ e $c = -3$. Ma se $c = -3$ allora ρ_c viola la condizione di positività, infatti per x vicino a 1 o -1:

$$\rho_{-3}(x) = -3x^2 + \frac{9}{6} \approx -3 + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2} < 0.$$

Per $c = 1$ al contrario $\rho_1 > 0$ su $(-1, 1)$. Quindi $c_0 = 1$.

2. Calcoliamo media e varianza di X:

$$E(X) = \int_{-1}^{1} x\left(x^2 + \frac{1}{6}\right) dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{12}\right]_{-1}^{1} = 0$$

poiché x^4 e x^2 sono funzioni pari;

$$V(X) = \int_{-1}^{1} x^2\left(x^2 + \frac{1}{6}\right) dx = \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{18}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{5} + \frac{1}{9} = \frac{18+5}{40} = \frac{23}{40} = 0.511.$$

Calcoliamo la funzione di ripartizione F di X. Per $a \in (-1, 1)$:

$$\mathbb{P}(X \leq a) = \int_{-1}^{a} \left(x^2 + \frac{1}{6}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x}{6}\right]_{-1}^{a} = \frac{a^3}{3} + \frac{a}{6} + \frac{1}{2}.$$

Quindi:

$$F(a) = \begin{cases} 0 & a \leq -1 \\ \dfrac{a^3}{3} + \dfrac{a}{6} + \dfrac{1}{2} & a \in (-1, 1) \\ 1 & a \geq 1. \end{cases}$$

3. Abbiamo:

$$\mathbb{P}(X \geq 0) = 1 - \mathbb{P}(X < 0) = 1 - F(0) = \frac{1}{2}.$$

Oppure:

$$\mathbb{P}(X \geq 0) = \int_{0}^{1} \left(x^2 + \frac{1}{6}\right) dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Lo stesso risultato si ottiene senza calcoli, notando la simmetria di ρ_1 rispetto a 0.

Esercizio # 5

Il peso in Kg di una popolazione di individui adulti è ben descritto da una legge gaussiana $\mathcal{N}(80, 100)$. Si determini

1. la probabilità che un individuo preso a caso abbia un peso compreso tra 70 e 100 kg.
2. la probabilità che, presi due individui (i cui pesi si suppongono indipendenti), entrambi abbiano peso compreso tra 70 e 100 kg.
3. la probabilità che, presi 1000 individui (i cui pesi si suppongono indipendenti), la media campionaria dei loro pesi superi i 62 Kg.

Soluzione Esercizio # 5

1. Sia $M \sim \mathcal{N}(80, 100)$ allora

$$\mathbb{P}(M \in (70, 100)) = \mathbb{P}\left(\frac{70-80}{10} < \frac{M-80}{10} < \frac{100-80}{10}\right) =$$

$$= \mathbb{P}(-1 < Z < 2) = \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) - (1 - \Phi(1))$$

$$\approx 0,9772 - 1 + 0,8413 = 0.8185,$$

dove $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

2. Il peso di ciascuno dei due individui ha legge $\mathcal{N}(80, 100)$ e sono indipendenti. Dunque:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M_1 \in (70, 100), M_2 \in (70, 100)) &= \mathbb{P}(M_1 \in (70, 100))\,\mathbb{P}(M_2 \in (70, 100)) \\ &\approx (0.8185)^2 = 0.6699. \end{aligned}$$

3. La media campionaria $\overline{X}$ dei pesi dei $n = 1000$ individui ha legge $\mathcal{N}(80, \frac{100}{n}) = \mathcal{N}(80,\ 0.1)$. Dunque:

$$\mathbb{P}(\overline{X} > 62) = \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}-80}{\sqrt{0.1}} > \frac{62-80}{\sqrt{0.1}}\right) = \mathbb{P}\left(Z > -56.92\right) \approx 1.$$