Statistica Matematica A - Ing. Meccanica, Aerospaziale
II prova in itinere - 2 febbraio 2005

Esercizio 1 Si vuole testare la velocità massima di una automobile sportiva. La casa dichiara una velocità max. di almeno 220 Km/h. Su 20 prove, la media campionaria delle velocità massime raggiunte è $\overline{x} = 215$. Per verificare l'affermazione della casa, si studi il test:

$$H_0 : \mu \geq 220, \qquad H_1 : \mu < 220$$

nelle due seguenti situazioni:

1. $\sigma = 15$. $\alpha = 1\%, 5\%, 10\%$. Calcolare il P-value.
2. $s = 17.3$. $\alpha = 1\%, 5\%, 10\%$. Stimare il P-value.

Soluzione.

1. Introduco la statistica test:
$$U := \frac{\overline{X} - 220}{15/\sqrt{20}}$$
dove $\overline{X}$ è la media campionaria. Il valore numerico è
$$u = \frac{215 - 220}{15/\sqrt{20}} = -1.49.$$
Il criterio di rifiuto di H_0 è $u < q_\alpha$ ($q_{0.01} \approx -2.33$, $q_{0.05} \approx -1.64$, $q_{0.1} \approx -1.28$) quindi il P-value è $P(Z < u) = P(Z > -u) = P(Z > 1.49) = 1 - \Phi(1.49) \approx 1 - 0.9319 = 0.0681$ cioè 6.81% e l'affermazione della casa costruttrice appare dubbia. Al 10% rifiuto H_0 mentre al 5% e 1% accetto H_0.

2. Introduco la statistica test:
$$U := \frac{\overline{X} - 220}{S/\sqrt{20}}$$

Il valore numerico è

$$u = \frac{215 - 220}{17.3/\sqrt{20}} = -1.29.$$

Il criterio di rifiuto di H_0 è $u < t_\alpha(19)$. Dalle tavole $t_{0.1}(19) = -t_{0.9}(19) = -1.328 < u$ mentre $t_{0.25,19} = 0.688 > u$, quindi al 10% accetto H_0 e al 25% la rifiuto. Dalle tavole segue che il P-value è compreso tra il 10% e il 15% e che accetto H_0 anche al 5% e 1%. Con un calcolatore si trova che il P-value esatto è $P(t < -1.29) = 1 - P(t < 1.29) \approx 11\%$.

Esercizio 2 Lanciamo una moneta 100 volte e otteniamo 59 volte testa e 41 volte croce. Volendo verificare se la moneta è truccata, ideiamo due test statistici:

1. chiamando p la probabilità che esca testa, studiamo il test:

$$H_0 : p = \frac{1}{2}, \qquad H_1 : p \neq \frac{1}{2}$$

   e ne calcoliamo il P-value, valutando poi se accettare o rifiutare H_0 al 10%, 5%, 1%.

2. chiamando p_T e p_C la probabilità che esca testa e, rispettivamente, croce, studiamo un test di adattamento alla distribuzione teorica ($p_T = 1/2$, $p_C = 1/2$) e ne stimiamo il P-value, valutando poi se accettare o rifiutare H_0 al 10%, 5%, 1%.

I risultati dei due test sono coerenti? Cosa si può dire e con quale grado di certezza sulla moneta?

Soluzione.

1. introduciamo la statistica test:

$$U := \frac{\overline{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}},$$

   con $\overline{p} = 0.59$, $p_0 = 0.5$, $n = 100$ e valore numerico $u = 1.8$. Il criterio di rifiuto di H_0 è $|u| > q_{1-\alpha/2}$, quindi il P-value è $2\,(1 - \Phi(|u|)) \approx 2(1 - 0.9641) = 0.0718$ cioè 7.18%.

2. in questo caso le frequenze teoriche sono $np_T = np_C = 50$, mentre quelle osservate $x_T = 59$, $x_C = 41$. La statistica test è:

$$U := \frac{(X_T - np_T)^2}{np_T} + \frac{(X_C - np_C)^2}{np_C}$$

   e il valore numerico $u = 3.24$. Il criterio di rifiuto di H_0 è $u > \chi^2_{1-\alpha}(1)$. Con $\alpha = 10\%$ abbiamo $\chi^2_{0.9}(1) = 2.705541$ e con $\alpha = 5\%$, $\chi^2_{0.95}(1) = 3.841455$. Quindi accettiamo H_0 al 5% e rifiutiamo al 10% e il P-value è compreso tra questi valori. Il calcolatore dà come P-value esatto il 7%.

In entrambi i test abbiamo ottenuto un P-value inferiore al 10%. Dai dati appare che la moneta potrebbe essere truccata.

Esercizio 3 Una ditta produce bulloni il cui diametro è ben modellato da una variabile normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Si consideri un campione di bulloni di ampiezza 30.

1. Se la deviazione standard campionaria s_{30} è 10^{-1} mm, calcolare una intervallo di confidenza al 95% del tipo $\sigma^2 \le k$ (ovvero un limite superiore di confidenza al 95%) per la varianza.

2. Se $s^2_{30} = 3 \cdot 10^{-2}$ mm^2 si studi il test:

$$H_0 : \sigma^2 \le 2 \cdot 10^{-2}, \qquad H_1 : \sigma^2 > 2 \cdot 10^{-2}$$

   ad un livello del 5% e si dia una stima del P-value.

Soluzione.

1. L'intervallo richiesto, con $\alpha = 95\%$ e $\chi^2_{0.05}(29) = 17.71$, è:

$$\sigma^2 \in \left[0, \frac{(n-1)\, s^2_{30}}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right] = \left[0, \frac{29 \cdot 10^{-2}}{17.71}\right] = [0, 1.6 \cdot 10^{-2}]$$

2. Il criterio di rifiuto di H_0 è $u > \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$, dove $U := S^2\,(n-1)/\sigma_0^2$. Abbiamo $u = 43.5$ e $\chi^2_{0.95,29} = 42.56 < u$, mentre $\chi^2_{0.975,29} = 45.72 > u$. Quindi rifiutiamo H_0 al 5% mentre l'accettiamo al 2.5% e il P-value è compreso tra tali valori. Il calcolatore dà come P-value esatto il 4%.

Esercizio 4 Il vicino di Romualdo, di nome Procopio, russa in maniera esasperante. Da anni Procopio russa sistematicamente almeno 25 notti su 30. Romualdo ha escogitato (e messo in atto) il seguente rimedio: tutte le sere alle 23:45 sveglia di soprassalto Procopio facendogli squillare il telefono. Dall'inizio di questa "cura" su 20 notti Procopio ha russato in 15 casi.

1. Calcolare un intervallo di confidenza al 90% bilatero per la probabilità p di russare dopo la cura.

2. Valutare se il rimedio di Romualdo è davvero efficace, ovvero se la probabilità p di russare dopo la cura è significativamente inferiore a quella p_0 prima della cura, proponendo un test e calcolandone il P-value.

Soluzione.

1. L'intervallo di confidenza a livello $\alpha = 0.9$ (si osservi che $q_{0.95} \approx 1.645$) è determinato dai suoi estremi

   $$\begin{aligned} p_1^{\pm} &:= \overline{p}_1 \pm \sqrt{\overline{p}_1(1-\overline{p}_1)/n} \cdot q_{0.95} = 0.75 \pm \sqrt{0.75(1-0.75)/20} \cdot q_{0.95} \\ &\approx 0.75 \pm 0.0968 \cdot 1.645 = 0.75 \pm 0.1592 \end{aligned}$$

   da cui $IC(0.9) = [0.5908, 0.9092]$.

2. Il test da studiare è:

   $$H_0 : p \geq p_0, \qquad H_1 : p < p_0.$$

   Infatti se riusciamo a rifiutare H_0 abbiamo dimostrato che la cura è evidentemente efficace. I dati $p_0 = 5/6$, $\overline{x} = 15$, $n = 20$, $\overline{p} = \overline{x}/n = 3/4$. La statistica test è:

   $$U := \frac{\overline{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$$

   e il criterio di rifiuto di H_0 è $u < q_\alpha$. Il valore numerico di U è $u = -1$, il P-value $P(Z < u) = P(Z > -u) = 1 - 0.8413 = 0.15487$ cioè 15.87%, quindi non abbiamo evidenza che la cura sia realmente efficace.

Esercizio 5 Due compagne di scuola sono in eterna competizione. Considerando i voti finali nelle 10 materie dell'ultimo anno di scuola media superiore, le medie sono rispettivamente $\overline{x}_1 = 9.4$ e $\overline{x}_2 = 9.3$. La prima ritiene di avere finalmente dimostrato la propria superiorità, mentre per la seconda l'eterna gara si è conclusa a suo vantaggio.

Supponendo che il voto in una qualunque materia della ragazza $i = 1, 2$ sia una variabile normale $\mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, si proponga e studi un test statistico per dirimere la controversia, nelle due seguenti situazioni:

1. deviazioni standard note $\sigma_1 = 0.6$ e $\sigma_2 = 0.5$
2. varianze ignote ma uguali, con deviazioni standard campionarie rispettive $s_1 = 0.4$ e $s_2 = 0.2$

Sugg: si studi $H_0 : \mu_1 \leq \mu_2$ e si stimi il P-value del test.

Soluzione. In entrambe le situazioni, possiamo studiare il test:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2, \qquad H_1 : \mu_1 > \mu_2.$$

Se rifiutiamo H_0 allora dimostriamo con evidenza che la prima studentessa è più brava, altrimenti diamo essenzialmente ragione alla seconda. Notiamo che i due campioni hanno dimensione $n_1 = n_2 = 10$.

1. La statistica test è:
$$U := \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$
e il criterio di rifiuto di H_0 è $u > q_{1-\alpha}$, con P-value $P(Z > u)$. Il valore numerico è $u = 0.4048$ e $P(Z > u) = 1 - 0.6554 = 0.3446$ o, eqivalentemente, 34.46%. Tale valore è troppo alto per dare un'evidenza chiara della falsità di H_0: quindi non possiamo dare ragione alla prima studentessa.

2. La statistica test è:
$$\frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$
dove S_p denota lo stimatore pooled. I valori numerici sono:
$$S_p^2 = \frac{9 \cdot (0.4)^2 + 9 \cdot (0.2)^2}{9 + 9} = 0.1, \qquad u = 0,707.$$

Il criterio di rifiuto di H_0 è $u > t_{1-\alpha}(18) \approx 1.33$. Dalle tavole troviamo anche $t_{0.75}(18) = 0.688 > u$, quindi il P-value è compreso tra il 10% e il 25% (il computer dà $P(t > u) = P(t > 0,707) = 0.2443 = 24.43\%$). Di nuovo il P-value è troppo alto per dare un'evidenza chiara della falsità di H_0.