Statistica Matematica A - Ing. Meccanica, Aerospaziale
I prova in itinere - 19 novembre 2004

Esercizio 1 Tre apparecchiature M_1 , M_2 e M_3 in un anno si guastano, in maniera indipendente, con probabilità $1/2$, $1/3$ e $1/4$ rispettivamente.

1. Calcolare la probabilità che tutte funzionino per tutto l'anno.
2. Calcolare la probabilità che almeno una di esse si guasti durante l'anno.
3. Calcolare la probabilità che almeno una di esse funzioni per tutto l'anno.

Soluzione. Sia, per ogni $i = 1, 2, 3$, $A_i = \{\text{l'apparecchiatura } M_i \text{ si guasta in un anno}\}$.

1. La probabilità cercata è $\mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = (1 - \mathbb{P}(A_1))(1 - \mathbb{P}(A_2))(1 - \mathbb{P}(A_3)) = 1/4$.
2. In questo caso si vuole calcolare $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ che, utilizzando il punto precedente risulta

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - \mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) = 3/4.$$

3. In questo caso dobbiamo calcolare $\mathbb{P}(A_1^c \cup A_2^c \cup A_3^c) = 1 - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 23/24 = 0.9583$.

Esercizio 2 Un commerciante di fagioli secchi riempie le confezioni con una macchina che non funziona molto bene, e dichiara che ogni confezione contiene 200g di fagioli. In realtà, il peso dei fagioli è una v.a. normale con media 200g e deviazione standard 9g. Se una scatola contiene 6 confezioni di fagioli, determinare la probabilità che:

1. il peso medio delle confezioni di una scatola sia inferiore a 195g;
2. il peso di una scatola sia almeno 1150 g;
3. su di una partita di 100 confezioni più di 60 siano sottopeso.

Soluzione. Il peso di una singola confezione è $X \sim \mathcal{N}(200, 9^2) = \mathcal{N}(200, 81)$.

1. Il peso medio è $\bar{X} \sim \mathcal{N}(200, 81/6) = \mathcal{N}(200, 13.5)$. Quindi viene richiesto di calcolare:

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \leq 195) &= P\left(\frac{\bar{X} - 200}{\sqrt{13.5}} \leq \frac{195 - 200}{\sqrt{13.5}}\right) = P(Z \leq -1.36) \\ &= 1 - \Phi(1.36) = 1 - 0.9131 = 0.0869. \end{aligned}$$

2. Il peso di una scatola è $S_6 = X_1 + \dots + X_6 \sim \mathcal{N}(6 \cdot 200, 6 \cdot 81) = \mathcal{N}(1200, 486)$. Dunque dobbiamo calcolare:

$$\begin{aligned} P(S_6 \geq 1150) &= P\left(\frac{S_6 - 1200}{\sqrt{486}} \geq \frac{1150 - 1200}{\sqrt{486}}\right) = P(Z \geq -2.26) \\ &= \Phi(2.26) = 0.9881. \end{aligned}$$

3. La probabilità che una confezione sia sottopeso è $1/2$, per simmetria. Il numero di confezioni sottopeso su 100 è una variabile binomiale Y con parametri $n = 100$ e $p = 1/2$. Per il teorema limite centrale $Y \sim \mathcal{N}(50, 25)$. Viene richiesto di calcolare: $P(Y > 60)$. Applicando la correzione di continuità:

$$\begin{aligned} P(Y > 60) &= P(Y > 60.5) = P\left(\frac{Y - 50}{5} > \frac{60.5 - 50}{5}\right) = P(Z > 2.1) \\ &= 1 - \Phi(2.1) = 1 - 0.9821 = 0.0179. \end{aligned}$$

Senza correzione di continuità:

$$\begin{aligned} P(Y > 60) &= P\left(\frac{Y - 50}{5} > \frac{60 - 50}{5}\right) = P(Z > 2) \\ &= 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228. \end{aligned}$$

Esercizio 3 Sia X una variabile aleatoria con densità

$$f_X(x) = cx^3(1-x), \quad x \in [0, 1],$$

con c costante opportuna.

1. Determinare c .
2. Si calcoli $P(X > 1/2)$ e $E(X)$.

3. Determinare la funzione di ripartizione (ovvero la cdf) di X .

Soluzione.

1. Deve essere $1 = \int_0^1 cx^3(1-x)dx$, da cui

$$1 = c \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{c}{20}$$

e quindi $c = 20$.

2. $P(X > 1/2) = \int_{1/2}^1 20x^3(1-x)dx = 13/16 = 0.8125$. $E(X) = \int_0^1 x f_X(x) dx = 2/3$.
3. $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt$. Quindi

$$F_X(x) = \begin{cases} F_X(x) = 0 & x \leq 0 \\ \int_0^x 20t^3(1-t)dt = 20 \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right) = 5x^4 - 4x^5 & 0 < x < 1 \\ F_X(x) = 1 & x \geq 1. \end{cases}$$

Esercizio 4 Un rilevatore è in grado di rilevare tutte le particelle γ che lo colpiscono ma si danneggia se viene colpito da (almeno) una particella α . Si sa che il numero di particelle γ rilevabili dall'apparecchio in un secondo è una variabile aleatoria X_1 di Poisson di media 4, mentre il numero di particelle α che possono colpire l'apparecchio in un secondo è descritto da una variabile Y_1 , indipendente da X_1 , anch'essa di Poisson ma con media 3.

1. Se attiviamo contemporaneamente tre rilevatori indipendenti, qual è la probabilità che dopo 1 secondo esattamente due di essi siano stati danneggiati?
2. Determinare la legge del primo istante in cui l'apparecchio viene colpito da una particella α . Qual è il suo valore medio?
3. Qual è la probabilità che in un intervallo di tempo $[0, t]$ l'apparecchio rilevi almeno una particella γ senza essere danneggiato dalle particelle α ? Mostrare che il valore di t che massimizza tale probabilità è

$$t = \frac{1}{4} \log(7/3).$$

Soluzione. Chiamiamo X_t e Y_t il numero di arrivi di particelle γ e rispettivamente α nell'intervallo di tempo $[0, t]$. Per ogni t , $X_t \sim \text{Poi}(4t)$ e $Y_t \sim \text{Poi}(3t)$.

1. Scelto un apparecchio, la probabilità che questo venga danneggiato in 1 secondo è $\mathbb{P}(X_1 \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X_1 = 0) = 1 - \exp(-3) = 0.95$. Il numero di rilevatori danneggiati su 3 è una binomiale W di parametri $(3, 0.95)$. Quindi dobbiamo calcolare:

$$P(W = 2) = \binom{3}{2} (0.95)^2 (0.05) = 0.135.$$

2. La legge dell'istante T_α dell'arrivo della prima particella α è esponenziale con parametro 3; pertanto il suo valore medio è $1/3$.
3. La probabilità cercata è, utilizzando l'ipotesi di indipendenza,

$$\begin{aligned} g(t) &:= \mathbb{P}(X_t \geq 1, Y_t = 0) = \mathbb{P}(X_t \geq 1)\mathbb{P}(Y_t = 0) \\ &= (1 - \exp(-4t)) \exp(-3t) \end{aligned}$$

per ogni $t > 0$ (mentre è evidentemente nulla se $t \leq 0$). La funzione g è differenziabile in $t > 0$ pertanto il punto di massimo t_0 dovrà soddisfare l'equazione $g'(t_0) = 0$ cioè

$$0 = g'(t_0) = -3(1 - \exp(-4t_0)) \exp(-3t_0) + 4 \exp(-4t_0) \exp(-3t_0)$$

che ha soluzione

$$t_0 = \frac{1}{4} \ln \frac{7}{3} = 0.2118$$

che deve essere necessariamente un punto di massimo poiché g ha limite 0 ai bordi dell'intervallo $(0, \infty)$ ed è positiva all'interno.

Esercizio 5 La durata di un certo tipo di lampadina è una v.a. esponenziale con media 100 ore.

1. Qual è la probabilità che una lampadina duri meno di 300 ore? Date n lampadine, qual è la probabilità che durino tutte meno di 300 ore?
2. Quante lampadine sono necessarie per essere sicuri al 95% di avere almeno 300 ore di luce se le lampadine vengono accese tutte contemporaneamente? (Suggerimento: passare al complementare e usare il punto 1)

3. Quante lampadine sono necessarie per essere sicuri al 95% di avere 3000 ore di luce se si usa una lampadina finché non si esaurisce, poi si sostituisce con un'altra e così via?

Soluzione. Durata di una lampadina = $X \sim \text{Exp}(1/100)$.

1. $P(X \leq 300) = 1 - e^{-300/100} = 1 - e^{-3} = 0.95$. Per l'indipendenza, la seconda probabilità richiesta è $[P(X \leq 300)]^n = [1 - e^{-3}]^n$.
2. Supponendo di accendere contemporaneamente n lampadine, dobbiamo calcolare la probabilità dell'evento $A = \{\text{almeno una dura più di 300 ore}\}$. L'evento complementare A^c è $\{\text{nessuna lampadina dura più di 300 ore}\} = \{\text{tutte durano meno di 300 ore}\}$. $P(A^c) = [1 - e^{-3}]^n$ è stato calcolato nel punto 2. Ne segue: $P(A) = 1 - [1 - e^{-3}]^n$.

Vogliamo $P(A) \geq 95\%$, quindi $1 - [1 - e^{-3}]^n \geq 0.95$, $[1 - e^{-3}]^n \leq 0.05$, $n \ln(1 - e^{-3}) \leq \ln 0.05$, $n \geq 58.66$ ovvero $n \geq 59$.

3. Sia n il numero di lampadine che vengono accese una dopo l'altra e siano $X_1, \dots, X_n$ le rispettive durate, con somma $S = X_1 + \dots + X_n$. Per il Teorema Limite Centrale, S ha approssimativamente distribuzione $\mathcal{N}(n \cdot 100, n \cdot (100)^2)$. Vogliamo che la seguente probabilità

$$P(S \geq 3000) = P\left(\frac{\bar{S} - 3000n}{100\sqrt{n}} \geq \frac{3000 - 100n}{100\sqrt{n}}\right) = P\left(Z \geq \frac{30 - n}{\sqrt{n}}\right)$$

sia superiore a 0.95. Dalla tabella, vediamo che $P(Z \geq t) \geq 0.95$ è soddisfatto per $t \leq -1.65$, quindi poniamo

$$\frac{30 - n}{\sqrt{n}} \leq -1.65$$

Questa disequazione è soddisfatta per $n \geq 40.5$, cioè $n \geq 41$.