Statistica Matematica A

Docente: Dott. F. Zucca

I prova in itinere

Lecco 22/11/2004

Tempo a disposizione: 2h30

Candidato

Cognome: .... **Nome:** ....

Corso di Laurea: ....

Matricola: .... **Anno di corso:** ....

1 Domande a risposta multipla

Ogni domanda ha una sola risposta esatta. Le risposte sbagliate sono contate negativamente per un terzo del valore della risposta esatta.

1. **Due eventi indipendenti A e B soddisfano necessariamente:**

☐ $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$
☐ $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$
☒ $\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$
☐ nessuna delle precedenti.

2. **Sia X una variabile aleatoria gaussiana: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
La probabilità $P(X < \mu + \sigma)$:**

☐ dipende solo da σ
☐ dipende solo da μ
☒ non dipende nè da σ nè da μ
☐ dipende sia da μ che da σ

3. **Una variabile aleatoria discreta X assume valore 1 con probabilità $1/2$. Quale delle seguenti è sicuramente vera?**

☐ X è Bernoulliana di parametro $1/2$.
☒ $\mathbb{P}(X \leq 1) \geq 1/2$.

☐ $\mathbb{P}(X \geq 1) < 1/2$.
☐ X è a valori positivi.

4. **Due eventi A e B hanno probabilità $\mathbb{P}(A) = 0.8$ e $\mathbb{P}(B) = 0.9$. Quale delle seguenti è sicuramente vera:**
☒ $\mathbb{P}(A \cap B) \geq 0.7$
☐ $\mathbb{P}(A \cup B) = 1$
☐ $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.72$
☐ nessuna delle precedenti è vera.

2 Esercizi

---

1. Un'azienda produce chip di memoria per computer alcuni funzionanti ed altri difettosi. La durata di un chip non difettoso è ben modellata da una variabile aleatoria X misurata in migliaia di ore che ha distribuzione esponenziale con media pari a 40 (migliaia di ore). I chip difettosi, invece, hanno vita media pari a 0.04 migliaia di ore e la loro durata è anch'essa descritta da una variabile aleatoria esponenziale S.

1. Determinare i parametri λ_X e λ_S rispettivamente della distribuzione relativa ai chip funzionanti e difettosi; scrivere quindi la funzione di ripartizione $F_X(x)$ di X.
2. Quanto vale la probabilità che la vita di un chip funzionante superi le 80 migliaia di ore? E quella di un chip difettoso?
3. Supponiamo che il $100(1-p)\%$ dei chip sia funzionante e il $100p\%$ sia difettoso (con $p \in (0,1)$). Qual è la probabilità che un chip scelto a caso dalla produzione sia funzionante?
4. Calcolare la probabilità che un chip, scelto a caso dalla linea di produzione, funzioni ancora dopo t unità di tempo.
   (Suggerimento: indicare con $A =$"il chip scelto funziona ancora dopo t unità di tempo", con $B =$ "il chip è di buona qualità" e con $B^C =$"il chip è di qualità scadente").
5. Per evitare di spedire troppi chip difettosi alla clientela ogni chip viene testato dalla azienda per t unità di tempo. Mostrare che la probabilità che il chip spedito sia di buona qualità sapendo che il chip funziona ancora dopo t unità di tempo è
$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{1}{1 + \frac{p}{1-p} e^{-999t/40}}.$$

Soluzione.

1. Sappiamo che $X \sim Esp(\lambda_X)$ quindi $EX = \frac{1}{\lambda_X}$. Da $EX = 40$ ricaviamo $\lambda_X = \frac{1}{40}$. Analogamente $\lambda_S = \frac{1000}{40} = 25$

   Allora:
$$F_X(x) = \left(1 - e^{-\frac{x}{40}}\right) I_{[0,+\infty)}(x).$$

2.
$$\mathbb{P}(X > 80) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 80) = 1 - F_X(80) = e^{-\frac{80}{40}} \simeq 0.1353.$$
$$\mathbb{P}(S > 80) = 1 - \mathbb{P}(S \leq 80) = 1 - e^{-25 \cdot 80} \simeq 0.$$

3. $$1-p.$$

4. $$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\cdot\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}\left(A|B^C\right)\cdot\mathbb{P}\left(B^C\right) =$$
$$= \mathbb{P}(X>t)(1-p) + \mathbb{P}(S>t)\,p = (1-p)\,e^{-t/40} + pe^{-25t}.$$

5. Per il teorema di Bayes si ha:
$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\cdot\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{(1-p)\,e^{-t/40}}{(1-p)\,e^{-t/40} + pe^{-1000t/40}} = \frac{1}{1+\frac{p}{1-p}e^{-999t/40}}.$$

2. Due studenti, Adalberto e Pierriccardo, stanno facendo la prima prova in itinere dell'esame di Statistica Matematica A. Adalberto è molto bravo, mentre Pierriccardo può passare l'esame se e solo se Adalberto riuscirà a passargli il compito; Adalberto pensa di appallottolare il compito e lanciarlo (senza essere visto) a Pierriccardo; per farlo dovrà necessariamente superare una distanza di 5 metri. Sfortunatamente Adalberto è deboluccio, infatti la sua gittata (in metri) è descritta da una variabile aleatoria X assolutamente continua con densità $f_X(x) = cx(10-x)\mathbb{1}_{(0,10)}(x)$ con c costante opportuna.

1. Determinare c.
2. Si calcoli la probabilità che Pierriccardo passi l'esame.
3. Determinare la funzione di ripartizione di X.

Soluzione.

1. Deve essere $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{(0,10)}(x)cx(10-x)dx = \int_0^{10} cx(10-x)dx$, da cui
$$1 = c\left(10\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{10} = 10^3\frac{c}{6}$$
e quindi $c = 6 \cdot 10^{-3}$.
2. Per la parità della densità f_X rispetto a $x = 5$, o mediante il calcolo diretto di $6 \cdot 10^{-3} \int_5^{10} x(10-x)dx$, si ottiene $P(X > 5) = 1/2$.
3. $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$. Quindi
$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_0^x 6\cdot 10^{-3} t(10-t)dt \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 6\cdot 10^{-3}\left(10\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) = (30x^2 - 2x^3)\cdot 10^{-3} & \text{se } 0 < x < 10 \\ 1 & \text{se } x \geq 10. \end{cases} \end{aligned}$$

3. Un maiale individua tutti i tartufi che entrano nel raggio d'azione del suo fiuto. Si supponga che, nel suo sgrufolare, il maiale riesca ad avvistare mediamente 1 tartufo ogni 40 minuti e che il numero di tartufi avvistati segua legge di Poisson (che, quindi, avrà parametro $\lambda = 1$ nell'intervallo temporale di ampiezza $t = 40$ minuti).

1. Calcolare il parametro λ_s per un intervallo di tempo $s = 2$ ore.
2. Calcolare la probabilità che il maiale individui meno di 4 tartufi in 2 ore.

Soluzione.

1. $$\lambda_s = \lambda \frac{s}{t} = 3$$
   dove $s = 2$ e $t = 2/3$ (espressi in ore).
2. Detta X_t la poissoniana che conta gli avvistamenti in t ore, la sua funzione di probabilità sarà: $p_{X_t}(k) = e^{-\nu t} \frac{(\nu t)^k}{k!}$ da cui ricaviamo
   $$\begin{aligned} P(X_2 \le 3) &= \sum_{k=0}^{3} p_{X_2}(k) = \sum_{k=0}^{3} e^{-3} \frac{(3)^k}{k!} \\ &= e^{-3} \left(1 + 3 + \frac{9}{2} + \frac{27}{6}\right) = 13e^{-3} \simeq 0.6472. \end{aligned}$$

4. Sia W una variabile normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

   1. Calcolare μ e σ sapendo che $\mathbb{P}(W > 2.4) = 0.1151$ e $\mathbb{P}(W \leq -4) = 0.0228$.
   2. Calcolare la probabilità dell'evento $\{|W| > 2\}$
   3. Consideriamo ora la variabile $X = 25 - W$. Qual è la sua distribuzione?

Soluzione.

1. Standardizzando abbiamo

$$\begin{cases} \mathbb{P}\left(\frac{W-\mu}{\sigma} \leq \frac{2.4-\mu}{\sigma}\right) = \phi\left(\frac{2.4-\mu}{\sigma}\right) = 1 - 0.1151 = 0.8849 \\ \mathbb{P}\left(\frac{W-\mu}{\sigma} \leq \frac{-4-\mu}{\sigma}\right) = \phi\left(\frac{-4-\mu}{\sigma}\right) = 0.0228 \end{cases}$$

   cioè

$$\begin{cases} \frac{2.4-\mu}{\sigma} = q_{0.8849} = 1.2 \\ \frac{-4-\mu}{\sigma} = q_{0.0228} = -2 \end{cases}$$

   la cui soluzione è $\mu = 0$ e $\sigma = 2$.

2. Detta $Z \sim N(0, 1)$ la v.a. normale ottenuta standardizzando W abbiamo che:

$$\mathbb{P}(|W| > 2) = \mathbb{P}(|Z| > 1) = 2 - 2\Phi(1) \simeq 2 - 2 \cdot 0.8413 \simeq 0.3174$$

3. $X \sim \mathcal{N}(25, 4)$.