Matematica II: Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

ELT A-Z

Docente: dott. F. Zucca

Esercitazione # 2

1 Distribuzione normale

Esercizio 1 *Sia X una variabile aleatoria Normale $\mathcal{N}(5,3)$. Facendo uso delle tavole:*

1. *si calcoli $P\left(|X-5|<1\right)$;*
2. *si stabilisca il valore α tale che $P\left(X<\alpha\right)=0.7$*
3. *si calcoli $Var\left(2X-3\right)$.*

Esercizio 2 *Una bilancia difettosa ha un errore sistematico di 0.1g ed un errore casuale che si suppone avere distribuzione Normale $\mathcal{N}(0,4/25)$ (si osservi quindi che si possono avere anche risultati negativi!). Si sottopone alla misura un campione di 0.9g. Calcolare:*

1. *la probabilità che la misura dia un risultato compreso tra 0.8g e 1g;*
2. *la probabilità la misura dia un risultato superiore a 1g;*
3. *la probabilità che la misura dia un risultato minore, in valore assoluto, di 0.9g.*

Esercizio 3 *La durata in ore della lampadina "gran fulminata" (prodotta dalla ditta "bulbo incandescente") segue una legge normale di media 2000 e varianza σ^2. Se un compratore richiede che almeno il 90% di esse abbia una durata superiore alle 1500 ore, qual è il valore massimo che σ può assumere per soddisfare l'esigenza dell'acquirente?*

Esercizio 4 *Un operatore, in attesa dell'apertura del mercato azionario, decide di comperare un pacchetto di azioni se la differenza tra il prezzo di apertura e quello di chiusura della sera precedente è compreso tra a e b ($a<b$, con $a,b\in\mathbb{R}$). supponendo che la variazione di prezzo segua una legge normale $\mathcal{N}\left(0,\sigma^2\right)$, qual è il vaolre di σ in corrispondenza del quale si ha la massima probabilità di comperare?*

Esercizio 5 *L'altezza di una data popolazione maschile di età compresa tra i 18 ed i 25 anni segue una distribuzione normale.*

1. *Se l'altezza media fosse 165cm ed esattamente il* 5.48% *della popolazione fosse più basso di 158cm, quale percentuale della popolazione avrebbe un'altezza superiore a 174cm?*

2. *Se il primo quartile dell'altezza fosse 160cm ed il* 90^o *percentile fosse 184cm, quanto varrebbero la media e la deviazione standard?*

Esercizio 6 *Il tempo necessario ad Adalberto per coprire il percorso casa-ufficio è una variabile aleatoria di legge normale. Se il tempo medio è di 30 minuti e la probabilità di coprire il percorso in più di 40 minuti è 0.1, quanto vale la probabilità di coprire il percorso in più di 50 minuti?*

2 Distribuzioni congiunte - indipendenza

Esercizio 7 *(es. 3.54 Montgomery - modificato)*

Due venditori indipendenti, le ditte "Argilla Imbevuta" e "Sbricioloni", forniscono il famoso cemento "Rapid-Trap" ad un appaltatore di autostrade. Grazie all'esperienza precedente, si sa che la resistenza alla compressione di provini in cemento può essere modellato da una distribuzione normale con media $\mu_1 = 6000$ *Kg/cm*^{2} *e deviazone standard* $\sigma_1 = 100$ *Kg/cm*^{2} *per quello della "Argilla Impastata" e* $\mu_2 = 5825$ *Kg/cm*^{2} *e deviazone standard* $\sigma_2 = 90$ *Kg/cm*^{2} *per quello della "Sbricioloni".*

1. *Qual è la probabilità che entrambi i venditori forniscano una partita di cemento con resistenza compresa tra 5800 e 6050 Kg/cm*^{2} *?*

2. *Quanto vale la probabilità che le resistenze del cemento di entrambi i venditori siano inferiori a 6100?*

Esercizio 8 *La fabbrica "Rust Into Rust" che fornisce le FS costruisce rotaie la cui lunghezza segue una legge normale* $\mathcal{N}(9.99, 1/10000)$ *(dove la media è in metri e la varianza in metri*^{2}*). Determinare:*

1. *la probabilità che una rotaia sia più lunga di 10m;*

2. *la probabilità che 101 rotaie siano più lunghe di 1Km;*

3. *la probabilità che esattamente 101 rotaie siano necessarie per coprire 1Km;*

4. *la lunghezza x affinché la percentuale di rotaie con lunghezza non superiore a x sia il 10%;*

5. *come si deve modificare la lunghezza media affinché la percentuale di rotaie con lunghezza superiore a 10m sia il 40%?*

3 Affidabilità

Esercizio 9 *Un'apparecchiatura elettronica A è composta da tre microchips M_1, M_2 e M_3. Le affidabilità di ciascun microchip, ovvero le probabilità che ciascun microchip funzioni correttamente, sono $a_1 = 0.95$, $a_2 = 0.99$, $a_3 = 0.7$. I microchips M_2 e M_3 sono collegati in parallelo a formare un unico componente C_2 (quindi C_2 funziona quando funziona almeno uno dei due microchips), il quale è collegato in serie con M_1 (quindi A funziona quando funzionano tutti e due i suoi componenti M_1 e C_2). Qual è l'affidabilità dell'intera apparecchiatura A?*

Esercizio 10 *Un'apparecchiatura è composta da 2 sottoinsiemi di tipo M che operano in parallelo. Ogni sottosistema M è costituito da 2 componenti che operano in serie ed ogni componente ha affidabilità pari a* 0.9.

1. *Si determini l'affidabilità dell'apparecchiatura.*

2. *Di quanti sottosistemi di tipo M collegati in parallelo dovrebbe essere composta l'apparecchiatura affinché la sua affidabilità sia almeno 0.99?*

Esercizio 11 *La ditta "F.lli Amanuensi" che stampa e rilega libri possiede 3 macchine per la stampa delle pagine, ognuna di affidabilità 0.7, ed una macchina per la rilegatura di affidabilità 0.8.*

1. *Rappresentare la situazione con un grafico e calcolare l'affidabilità del sistema.*

2. *Alla ditta viene proposto l'acquisto di una certa macchina di affidabilità p che stampa e rilega. Quanto deve valere p perché, con l'acquisto di tale macchina, l'affidabiità totale del sistema sia almeno 0.95?*

4 Svolgimenti

Soluzione esercizio 1.

1. $P(|X-5|<1) = P(-1 < X-5 < 1) = \phi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \phi\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2\phi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - 1 = 0.438$

   dove ϕ rappresenta la funzione di distribuzione cumulata della normale standard.

2. $P(X<\alpha) = \phi\left(\frac{\alpha-5}{\sqrt{3}}\right) = 0.7$. *Dalle tavole si deduce che* $\frac{\alpha-5}{\sqrt{3}} = 0.5244$ *e quindi* $\alpha = 5.9$

3. $Var\,(2X-3) = 4 \cdot Var\,(X) = 12$

Soluzione esercizio 2.

Indichiamo con X *l'errore casuale e con* M *la misura del nostro campione. Quindi* $X \sim \mathcal{N}\,(0, 4/25)$, $5X/2 \sim \mathcal{N}\,(0,1)$ *e* $M = X + 0.1 + 0.9 = X + 1$.

1. $P\,(0.8 \le M \le 1) = P\,(-0.2 \le X \le 0) = P\left(-\frac{1}{2} \le \frac{5}{2}X \le 0\right) = \phi\,(0) - \phi\,(-0.5) = \phi\,(0.5) - 0.5 = 0.1915$ *(si ricordi che* $\phi\,(x) + \phi\,(-x) = 1$*).*

2. $M \le 1$ *se e solo se* $X \le 0$ *quindi* $P\,(M \le 1) = P\,(X \le 0) = 1/2$.

3. $|X+1| \le 9/10$ *se e solo se* $X \in [-19/10; -1/10]$, *pertanto* $P\,(X \in [-19/10; -1/10]) = P\,(5X/2 \in [-19/4; -1/4]) = \phi\,(19/4) - \phi\,(1/4) = 1 - 0.5987 = 0.4013$.

Soluzione esercizio 3.
Sia X *la durata di una lampadina. L'acquirente richiede che* $0.9 \le P\,(X \ge 1500) = 1 - \phi\,(-500/\sigma)$. *Pertanto si richiede che* $\phi\,(500/\sigma) \ge 0.9$ *ovvero* $500/\sigma \ge 1.2816$. *Quindi* $\sigma \le 500/1.2816 = 390.137$.

Soluzione esercizio 4.
Sia X *la differenza di quotazione,* $P\,(X \in [a,b]) = f\,(\sigma)$, *dove, dopo un cambio di variabile*

$$f\,(\sigma) = \int_{a/\sigma}^{b/\sigma} \frac{\exp\left(-s^2/2\right)}{\sqrt{2\pi}}\,ds.$$

Calcolando la derivata f' *e studiando la funzione in* $(0, +\infty)$ *si trova immediatamente che*

a) se $a \le 0 \le b$ $(a < b)$ *allora* f *è decrescente, pertanto minore è* σ *maggiore è la probabilità che* $X \in [a,b]$ *(ed il limite per* σ *che tende a* 0^+ *di tale valore è 1);*

b) se $0 < a < b$ *allora si trova che* f *è decrescente in* $\left(\sqrt{(b^2-a^2)\,/\,(2\ln(b/a))}; +\infty\right)$ *e crescente in* $\left(0; \sqrt{(b^2-a^2)\,/\,(2\ln(b/a))}\right)$, *pertanto il massimo è assunto in* $\sigma^2 = \left(b^2 - a^2\right)/\,(2\ln(b/a))$.

c) se $a < b < 0$, *utilizzando la parità ed il punto precedente si ha che il massimo è assunto in* $\sigma^2 = \left(a^2 - b^2\right)/\,(2\ln(a/b))$.

Soluzione esercizio 5.
Ricordiamo che $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ *implica* $(X-\mu)/\sigma \sim \mathcal{N}(0,1)$ *e che, se* U_X *è la funzione dei quantili di* X *allora* $U_X = \mu + \sigma q$ *(dove* q *è la funzione dei quantili della distribuzione* $\mathcal{N}(0,1)$. *Si ricordi inoltre che* $q(\alpha) = -q(1-\alpha)$.

a) Sappiamo che $\mu = 165$ *e che* $0.0548 = \mathbb{P}(X \le 158) = \phi((158-\mu)/\sigma)) = \phi(-7/\sigma)$, *pertanto* $\sigma = -7/q(0.0548) = 7/q(0.9452) \approx 7/1.6 = 4.375$. *Da cui* $\mathbb{P}(X > 174) = 1 - \phi((174-\mu)/\sigma) = 1 - \phi(2.0571) = 1 - 0.9802 = 0.0198$.

b) Se $160 = U_X(1/4) = \mu + \sigma q(1/4)$, $184 = U_X(9/10) = \mu + \sigma q(9/10)$ *allora* $\sigma = (184 - 160)/(q(9/10) - q(1/4)) \approx 24/(1.2816 - 0.6745) = 12.2693$, *mentre* $\mu = (160q(9/10) - 184q(1/4))/(q(9/10) - q(1/4)) \approx 329.1544/1.956 = 168.2758$.

Soluzione esercizio 6.
$1/10 = \mathbb{P}(X > 40) = 1-\phi((40-30)/\sigma)$ *pertanto* $\sigma = 10/q(9/10) \approx 10/1.2816 = 7.8027$. *Da cui* $P(X > 50) \approx 1 - \phi(20/7.8027) = 1 - \phi(2.5632) = 1 - 0.9948 = 0.0052$.

Soluzione esercizio 7.
Indichiamo con X_1 *e con* X_2 *la resistenza del cemento prodotto dal venditore 1 e dal 2, rsipettivamente.*

1. *Siccome* X_1 *e* X_2 *sono indipendenti, allora*
   $$
   \begin{aligned}
   &P\left(5800 \le X_1 \le 6050; 5800 \le X_2 \le 6050\right) = \\
   &= P\left(5800 \le X_1 \le 6050\right) P\left(5800 \le X_2 \le 6050\right) = \\
   &= \left[\phi\left(0.5\right) - \phi\left(-2\right)\right]\left[\phi\left(\tfrac{225}{90}\right) - \phi\left(-\tfrac{25}{90}\right)\right] = \\
   &= \left[\phi\left(0.5\right) - 1 + \phi\left(2\right)\right]\left[\phi\left(\tfrac{225}{90}\right) - 1 + \phi\left(\tfrac{25}{90}\right)\right] = \\
   &= \left(0.6915 - 1 + 0.9772\right)\left(0.9938 - 1 + 0.6103\right) = 0.40
   \end{aligned}
   $$

2. *Siccome* X_1 *e* X_2 *sono indipendenti, allora* $P\left(X_1 < 6100; X_2 < 6100\right) = P\left(X_1 < 6100\right) P\left(X_2 < 6100\right) = ... = 0.84$, *quindi non è possibile che la probabilità richiesta nel punto (2) sia pari al 92%.*

Soluzione esercizio 8.
Sia X *la misura di una rotaia.*

1. $P\left(X > 10\right) = 1 - \phi\left(\left(10 - 9.99\right)/0.01\right) = 1 - \phi\left(1\right) = 1 - 0.8143 = 0.1857$

2. *Se* $\{X_i\}_{i=1,\dots,101}$ *sono le misure (indipendenti ed identicamente distribuite) delle 101 rotaie, allora* $\sum_{i=1}^{101} X_i \sim \mathcal{N}\left(101 \cdot 9.99, 101 \cdot (1/10000)\right)$, *pertanto*
   $$
   \begin{aligned}
   &P\left(\sum_{i=1}^{101} X_i > 1000\right) = 1 - \phi\left(\left(1000 - 9.99 \cdot 101\right)/\sqrt{0.0101}\right) = \\
   &= 1 - \phi\left(-89.9/\sqrt{1.01}\right) \cong 1
   \end{aligned}
   $$

3. *sebbene un calcolo esatto di questo tipo coinvolgerebbe una convoluzione, in questo specifico caso possiamo stimare la probabilità in questo modo: sia* A *"le prime 100 rotaie non bastano a coprire 1Km" e* B *" le 101 rotaie bastano a coprire 1Km". quello che dobbiamo calcolare è* $P\left(A \cap B\right)$ *cioè* $P\left(A\right) - P\left(A \cap B^c\right) \ge P\left(A\right) - P\left(B^c\right)$. *Siccome* $\sum_{i=1}^{100} X_i \sim \mathcal{N}\left(100 \cdot 9.99, 100 \cdot (1/10000)\right)$, *pertanto* $P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i > 1000\right) = 1 - \phi\left(1/0.1\right) = 1 - \phi\left(10\right) \cong 0$. *Quindi* $P\left(A\right) - P\left(A \cap B^c\right) \ge P\left(A\right) - P\left(B^c\right) \cong 1$. *(Si osservi che, essendo variabili normali, le lunghezze non sono necessariamente positive e quindi* B^c *non è contenuto in* A*, anche nel nostro caso la probabilità dell'evento* $B^c \cap A^c$ *è prossima a 0).*

4. $P(X \leq x) = 0.1$ *ovvero* $\phi((x - 9.99) / (1/100)) = 0.1$. *Quindi* $x = 9.9887$.

5. $1 - \phi\left(\frac{10-\mu}{0.01}\right) = 0.4$ *quindi* $\phi(1000 - 100\mu) = 0.6$. *Quindi* $1000 - 100\mu = 0.2533$ *ovvero* $\mu = 10 - 0.002533 = 9.997467$.

Soluzione esercizio 9.

$a^{C_2} = P(C_2 \text{ funzioni}) = 1 - P(C_2 \text{ non funzioni}) =$
$= 1 - P(M_2 \text{ e } M_3 \text{ non funzionano}) = 1 - (1 - 0.99)(1 - 0.7) = 0.997$

$a_{totale} = a^{C_2} \cdot a_1 = 0.997 \cdot 0.95 = 0.9497$

Soluzione esercizio 10.

1. *Chiamiamo* M_1 *e* M_2 *i due sottoinsiemi di tipo M in parallelo che formano l'apparecchiatura. Allora:*

$$a^{M_1} = a^{M_2} = 0.9 \cdot 0.9 = 0.81$$

quindi l'affidabilità totale dell'apparecchiatura:

$$a_{totale} = 1 - (1 - 0.81) \cdot (1 - 0.81) = 0.9639$$

2. *Chiamiamo* n *il numero di sottoinsiemi M collegati in parallelo e S il nuovo sistema.*

Quindi l'affidabilità di S è data da:

$$a_S = 1 - (1 - a_M)^n = 1 - (0.19)^n$$

Dobbiamo allora determinare n *tale che* $1 - (0.19)^n \geq 0.99$. *Si trova che* $n \geq \log(0.01)/\log(0.19) \approx 2.773$ *pertanto* $n \geq 3$.

Soluzione esercizio 11.

1. $a_{stampa} = 1 - (0.3)^3 = 0.973$

$a_{totale} = a_{stampa} \cdot a_{rilegatura} = 0.973 \cdot 0.8 = 0.7784$

2. *b) p deve soddisfare*

$$\begin{aligned} 1 - (1 - 0.7784)(1 - p) &\geq 0.95 \\ (1 - 0.7784)(1 - p) &\leq 0.05 \\ 1 - p &\leq 0.2256 \end{aligned}$$

quindi $p \geq 0.7744$.