

Matematica II - ING ELT
Appello del 21/9/2006

Nome e cognome:

Scegliere una delle opzioni sottostanti

Matricola:

☐ **Recupero I parte** ☐ **Recupero II parte** ☐ **Scritto completo**

Esercizio 1 Si consideri la seguente funzione da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

1. Stabilire in quali punti di $\mathbb{R}^2$ la funzione è continua e in quali è differenziabile.
2. Calcolare le derivate direzionali nell'origine. Cercare i punti estremanti e stabilirne la natura.
3. Cercare i punti estremanti di $|f(x, y)|$.

Soluzione. La funzione è sicuramente $C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{y = 0\})$ (anzi $C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{y = 0\})$). La funzione non è continua nei punti del tipo $(x, 0)$; se $x \neq 0$ non esiste il limite finito, mentre in $(0, 0)$ basta prendere un avvicinamento del tipo (t, t^3) (per $t \rightarrow 0$). La derivata direzionale lungo $(v_1, v_2) \neq (0, 0)$

$$D_{(v_1, v_2)} f(0, 0) = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} t v_1^2 / v_2 = 0 & v_2 \neq 0 \\ 0 & v_2 = 0. \end{cases}$$

Dalla simmetria $f(x, y) = f(-x, y) = -f(x, -y)$ e dal fatto che se $xy \neq 0$ $f(x, y) \neq 0$, si ha che i punti con $y = 0$ non possono essere estremanti, mentre i punti del tipo $(0, y)$ con $y > 0$ (risp. $y < 0$) sono minimi (risp. massimi) locali deboli. . Negli altri punti basta notare che lungo le rette (tx, ty) al variare di t (con $y \neq 0$), la funzione $f(tx, ty) = tx^2/y$ non ha estremanti, quindi non esistono estremanti al di fuori degli assi. Alternativamente si calcola lo Jacobiano in (x, y) con $xy \neq 0$

$$Jf(x, y) = (2x/y, -x^2/y)$$

che non si annulla al di fuori degli assi. Per quanto riguarda la funzione $|f(x, y)|$ si osserva immediatamente che, essendo f continua nei punti $f \neq 0$, un punto in questo insieme è estremante per f se e solo se lo è per $|f|$, quindi $|f|$ non ha estremanti al di fuori degli assi. D'altro canto $|f| \geq 0$ e sugli assi si annulla, quindi tutti i punti sugli assi sono minimi assoluti deboli.

Esercizio 2

Determinare gli insiemi di convergenza puntuale, uniforme ed assoluta di ciascuna delle due serie seguenti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(x)^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(x)^n}{n^2}.$$

(Sugg: studiare inizialmente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ e quindi utilizzare l'inversa del logaritmo).

Soluzione. Sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (oppure $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) e si consideri una serie di potenze $\sum_n a_n z^n$. Si osservi che, in generale,

1. se in A c'è convergenza puntuale, assoluta o uniforme per $\sum_n a_n z^n$ allora $\sum_n a_n (f(z))^n$ converge puntualmente, assolutamente o uniformemente su $f^{-1}(A)$;
2. se in A c'è convergenza puntuale, assoluta o uniforme per $\sum_n a_n (f(z))^n$ allora $\sum_n a_n z^n$ converge puntualmente, assolutamente o uniformemente su $f(A)$.

Essendo $x \mapsto \log(x)$ iniettiva (e quindi invertibile da $\mathbb{R}$ sul codominio $[0, +\infty)$), si ha che ciascuna delle due condizioni precedenti diventa necessaria oltre che sufficiente. Quindi studiamo le due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ converge puntualmente in $[-1, 1)$, assolutamente in $(-1, 1)$ ed uniformemente in ciascun sottoinsieme di $[-1, 1)$ che non abbia 1 come punto di accumulazione (quindi su ciascun sottoinsieme di $[-1, 1 - \epsilon)$ per qualche $\epsilon > 0$). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ converge puntualmente, uniformemente ed assolutamente su $[-1, 1]$.

Pertanto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(x)^n}{n}$ converge puntualmente in $[1/e, e)$, assolutamente in $(1/e, e)$ ed uniformemente in ogni sottoinsieme di $[1/e, e - \epsilon)$ per qualche $\epsilon > 0$. Allo stesso modo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(x)^n}{n^2}$ converge puntualmente, assolutamente ed uniformemente su $[1/e, e]$.

Esercizio 3 Risolvere il seguente problema di Cauchy al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y' = e^{-y} \log(x) \\ y(e) = y_0 \end{cases}$$

Specificare per quali valori di y_0 la soluzione è definita su tutto $(0, +\infty)$.

Soluzione. L'equazione è a variabili separabili; poiché $e^{-y} \neq 0$ le soluzioni dell'equazione sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione

$$\int_{y_0}^y e^s ds = \int_e^x \log(s) ds$$

cioè $e^y = e^{y_0} + x(\log(x) - 1)$. Cerchiamo, al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, il più grande intervallo I contenente e per cui la precedente equazione ammetta una soluzione definita su tutto I . Sappiamo che $e^y = z$ ammette una (ed in tal caso una sola) soluzione se e solo se z appartiene al codominio della funzione esponenziale, cioè $(0, +\infty)$ ed in tal caso $y = \log(z)$. Quindi si tratta di risolvere la disequazione $e^{y_0} + x(\log(x) - 1) > 0$; poiché $x \mapsto x(\log(x) - 1)$ ha un minimo in 1 (direttamente dall'equazione differenziale!), l'intervallo massimale sarà tutto $\mathbb{R}$ se e solo se $0 < e^{y_0} + \log(1) - 1 = e^{y_0} - 1$ cioè se e solo se $y_0 > 0$. Se $y_0 \leq 0$ l'intervallo massimale della soluzione sarà $[x_0, +\infty]$ dove x_0 è la più grande soluzione dell'equazione $e^{y_0} + x(\log(x) - 1) = 0$ (osserviamo che $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{y_0} + x(\log(x) - 1) = e^{y_0}$).

Più precisamente si osserva che

- Se $y_0 > 0$ la soluzione è decrescente su $(0, 1)$ (e $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = y_0^-$) e crescente su $(1, +\infty)$.
- Se $y_0 \leq 0$ la soluzione è crescente su $(x_0, +\infty)$ e $\lim_{x \rightarrow x_0^+} y(x) = -\infty$.

Esercizio 4 Il numero di lettere imbucate in un giorno in una cassetta è una variabile di Poisson di media 10.

1. Si determini la probabilità che in un giorno non vengano imbucate lettere.
2. Il postino passa a ritirare la posta ogni giorno alle 12 (tranne la domenica). Calcolare la probabilità che nella cassetta vi siano esattamente 3 lettere alle 18 di domenica.
3. Qual è la probabilità che il postino trovi vuota la cassetta almeno una volta in 2080 settimane?

Soluzione.

1. Siano X_i le lettere depositate nel giorno i -esimo, allora $X_i \sim P(10)$ quindi $\mathbb{P}(X_i = 0) = e^{-10} \approx 4.54 \cdot 10^{-5}$.
2. Se Y è la variabile che conta le lettere depositate dalle 12 di sabato alle 18 di domenica, si ha $Y \sim P(10 \cdot 30/24) = P(12.5)$. Pertanto $\mathbb{P}(Y = 3) = e^{-12.5} 12.5^3 / 3! \approx 1.213 \cdot 10^{-3}$.
3. Sia $Z_{i,j}$ la variabile che vale 1 se nel giorno lavorativo i della settimana j il postino trova la cassetta vuota e 0 altrimenti ($i = 1, \dots, 6$, $j = 1, \dots, 2080$). Ovviamente sono indipendenti e $Z_{i,j} \sim B(e^{-10})$ se $i = 1, \dots, 6$, mentre $Z_{1,j} \sim B(e^{-20})$, pertanto se A è l'evento "la cassetta è sempre piena" si ha

$$\mathbb{P}(A) = (1 - e^{-10})^{10400} (1 - e^{-20})^{2080} \approx 0,6236$$

da cui la probabilità cercata $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) \approx 0.3763$. Il risultato approssimato si può conseguire anche con l'approssimazione di Poisson ($X \sim B(n, p)$ si approssima, sotto opportune condizioni n/p molto grande, con $Y \sim P(np)$ (qui $n = 5 \cdot 2080$, $p = e^{-10}$ in un caso e $n = 2080$, $p = e^{-20}$ nell'altro), da cui la probabilità cercata è $1 - e^{-10400 \cdot e^{-10}} \cdot e^{-2080 e^{-20}} \approx 0.3763$.

Esercizio 5 La ditta *Gurgle* vorrebbe commercializzare una nuova bibita *diet*. Il proprietario è molto prudente e non vuole rischiare che il prodotto rimanga invenduto e decide di attivare la produzione solo se risultasse evidente che almeno il 75% della popolazione è interessato. Pertanto commissiona un'indagine di mercato dalla quale risulta che, su 2000 intervistati, 1580 si dicono disposti all'acquisto. Conviene iniziare la produzione?

Soluzione. Si consideri il test

$$H_0 : p \leq p_0$$

$$H_0 : p > p_0$$

dove $p_0 := 0.75$. Lo stimatore è $\bar{p} = 1580/2000 = 0.79$ e la quantità pivotale

$$\frac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}} = \frac{0.79 - 0.75}{\sqrt{0.75 \cdot 0.25/2000}} \approx 4.1372.$$

Il P-value

$$\bar{\alpha} = 1 - \Phi(4.1372) \approx 1.8044 \cdot 10^{-5} \approx 0$$

è molto basso, quindi l'ipotesi nulla non è plausibile e di conseguenza conviene mettere in produzione la bibita.

Esercizio 6 Consideriamo la seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} c \log(x), & \text{per } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{per } x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

1. Determinare i valori di $c \in \mathbb{R}$ che rendono f una funzione di densità. Sia X una variabile continua di legge f ; calcolare media e varianza di X .
2. Se $\{X_i\}_{i=1}^{40}$ sono variabili indipendenti e di legge f , calcolare $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{40} X_i \geq 9\right)$.

Soluzione.

1. Le condizioni necessarie e sufficienti sono

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1 \\ f \geq 0. \end{cases}$$

In questo caso essendo la funzione a segno costante, la prima condizione implica la seconda quindi, integrando per parti,

$$1 = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = c \int_0^1 \log(x) dx = cx(\log(x) - 1)|_0^1 = -c$$

da cui $c = -1$. Inoltre

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx = - \int_0^1 x \log(x) dx = x^2(1/2 - \log(x))/2|_0^1 = 1/4 \\ E(X^2) &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) dx = - \int_0^1 x^2 \log(x) dx = x^3(1/3 - \log(x))/3|_0^1 = 1/9 \\ \text{var}(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = 7/144. \end{aligned}$$

2. Utilizzando il TLC

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{40} X_i \geq 9\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{40} X_i - 40/4}{\sqrt{40 \cdot 7/144}} \geq \frac{9 - 40/4}{\sqrt{40 \cdot 7/144}}\right) \\ &\approx 1 - \Phi\left(-\frac{6}{\sqrt{70}}\right) \approx \Phi(0.7171) \approx 0.7634. \end{aligned}$$