49278

Matematica II: Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica
II prova in itinere - 15 giugno 2006

Esercizio 1 Due famosi piloti di slittino, Martin Slippery e John Steep, stanno gareggiando sulla pista *Upsidedown* dove, da esperienze passate, sanno che ogni loro prova è indipendente e di legge, rispettivamente, $T_1 \sim \mathcal{N}(58.1, 1)$ e $T_2 \sim \mathcal{N}(58.3, 0.44)$. La gara si svolge su n prove e vince chi ha la minor somma dei tempi. Supponendo che i tempi delle varie prove siano indipendenti si svolgano i punti seguenti (giustificando adeguatamente le risposte).

1. Qual è la legge della variabile $T_1 - T_2$? (Sugg: si ricordi che somma di normali indipendenti è una normale, calcolare i parametri di questa variabile.)

2. Calcolare la probabilità che Slippery vinca con $n = 16$.

3. Quante prove sono necessarie affinché Slippery vinca con probabilità pari almeno al 95%?

(Sugg: chi non riuscisse ad utilizzare il punto (1) nei punti successivi, risolva i punti (2) e (3) con la seguente semplificazione: la differenza delle somme dei tempi di Slippery e Steep su n prove è una variabile normale $\mathcal{N}(n/10, n)$.)

Soluzione.

1. Sia $\Delta := T_1 - T_2$, dall'indipendenza si ha $\Delta \sim \mathcal{N}(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2) = \mathcal{N}(-0.2, 1.44)$. Se si svolgono n prove la differenza delle somme totali dei tempi sarà $F_n := \sum_{i=1}^n \Delta_i \sim \mathcal{N}(-0.2n, 1.44n)$.

2. $$\mathbb{P}(F_n < 0) = \mathbb{P}\left(\frac{F_n + 0.2n}{1.2\sqrt{n}} < \frac{0.2n}{1.2\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{6}\right) \uparrow 1 \qquad n \to \infty$$

   Quindi a Slippery conviene avere a disposizione il maggior numero di prove. Nel caso $n = 16$ si ha $\Phi(2/3) \approx 0.7475$.

3. Da $\alpha \le \mathbb{P}(F_n < 0) = \Phi(\sqrt{n}/6)$ si ottiene $n \ge 36 q_\alpha^2$; essendo $q_{0.95} \approx 1.6448$ si ha $n \ge 97.39$ da cui $n \ge 98$.

Esercizio 2 Tre persone stanno pescando ed ognuno di essi, in modo indipendente dalle altre, cattura un numero di pesci che può essere rappresentato da una variabile di Poisson con media pari a 4 pesci ogni 2 ore.

1. Che legge ha la variabile N che conta il numero di pesci pescati da un qualsiasi pescatore in un ora?

2. Fissato un pescatore qualsiasi, calcolare la probabilità che non peschi nemmeno un pesce nella prima ora. Calcolare inoltre la probabilità che peschi esattamente un pesce nella prima ora.

3. Calcolare la probabilità che i primi due pescatori prendano esattamente un pesce ciascuno ed il terzo non peschi nulla nella prima ora.

4. Calcolare la probabilità che esattamente 2 pescatori su 3 prendano almeno un pesce nella prima ora.

5. Quanti pescatori sono necessari affinché con probabilità almeno pari al 90% vengano pescati almeno 200 pesci nella prima ora? (Si supponga che i numeri di pesci pescati da ciascun pescatore siano variabili indipendenti)

Soluzione.

1. La variabile N che conta il numero di pesci pescati in un'ora da un qualsiasi pescatore ha legge di Poisson di parametro 2.

2. Dal punto precendente $\mathbb{P}(N = j) := e^{-2}2^j/j!$ per ogni $j \in \mathbb{N}$, da cui $\mathbb{P}(N = 0) = e^{-2} \approx 0.1353$ e $\mathbb{P}(N = 1) = 2e^{-2} \approx 0.2707$.

3. Sia N_i il numero di pesci pescati dall'i-esimo pescatore; $\mathbb{P}(N_i = j) := e^{-2}2^j/j!$. Pertanto, per l'indipendenza delle variabili,

$$\mathbb{P}(N_1 = 1, N_2 = 1, N_3 = 0) = \mathbb{P}(N_1 = 1)^2\mathbb{P}(N_1 = 0) \approx 9.913 \cdot 10^{-3}.$$

4. In questo caso si chiede la probabilità di avere 2 successi su 3 tentativi (con probabilità di successo $\mathbb{P}(N_1 > 0) = 1 - \mathbb{P}(N_1 = 0) = 1 - e^{-2}$) da cui si ottiene il risultato

$$\binom{3}{2}\mathbb{P}(N_1 = 0)\mathbb{P}(N_1 > 0)^2 \approx 0.3035.$$

5. Dal Teorema Centrale del Limite si ha

$$X_n := \sum_{i=1}^{n} N_i \approx Z_n \sim \mathcal{N}(2n, 2n)$$

pertanto si tratta di risolvere

$$\alpha \leq \mathbb{P}(X_n \geq 200-0.5) = \mathbb{P}\left(\frac{X_n - 2n}{\sqrt{2n}} \geq \frac{199.5 - 2n}{\sqrt{2n}}\right) \approx \Phi\left(\frac{199.5 - 2n}{\sqrt{2n}}\right)$$

cioè

$$199.5 - t^2 \geq q_{1-\alpha}t$$

dove $\alpha = 0.9$ e $t = \sqrt{2n}$ (pertanto si cercano soluzioni nell'insieme $\{t \geq 0\}$). Dalle tavole $q_{0.1} \approx -1.28155$, da cui si ottiene l'unica soluzione accettabile $n \geq 109.22$ che equivale a $n \geq 110$.

Esercizio 3 Arturo Cecato ogni mattina trova qualche difficoltà ad attraversare il corridoio che separa la camera dal bagno. Non essendo mai ben sveglio, 25 mattine su 30 va a sbattere contro un mobile. Da qualche tempo ha escogitato un rimedio che sta testando: appena alzatosi dal letto infila la testa in un secchio di ghiaccio: da quando ha adottato questa nuova procedura (20 mattine) Arturo ha colpito il mobile in 15 casi.

1. Calcolare un intervallo di confidenza al 90% bilatero per la probabilità p di colpire il mobile una mattina qualsiasi con la nuova procedura.

2. Valutare se il rimedio di Arturo è davvero efficace, ovvero se la probabilità p di colpire il mobile dopo la cura è significativamente inferiore a quella p_0 prima della cura, proponendo un test e calcolandone il P-value.

Soluzione.

1. L'intervallo di confidenza a livello $\alpha = 0.9$ (si osservi che $q_{0.95} \approx 1.645$) è determinato dai suoi estremi

$$\begin{aligned} p_1^{\pm} &:= \overline{p}_1 \pm \sqrt{\overline{p}_1(1-\overline{p}_1)/n} \cdot q_{0.95} = 0.75 \pm \sqrt{0.75(1-0.75)/20} \cdot q_{0.95} \\ &\approx 0.75 \pm 0.0968 \cdot 1.645 = 0.75 \pm 0.1592 \end{aligned}$$

da cui $IC(0.9) = [0.5908, 0.9092]$.

2. Il test da studiare è:

$$H_0 : p \geq p_0, \qquad H_1 : p < p_0.$$

Infatti se riusciamo a rifiutare H_0 abbiamo dimostrato che la cura è evidentemente efficace. I dati $p_0 = 5/6$, $\overline{x} = 15$, $n = 20$, $\overline{p} = \overline{x}/n = 3/4$. La statistica test è:

$$U := \frac{\overline{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$$

e il criterio di rifiuto di H_0 è $u < q_\alpha$. Il valore numerico di U è $u = -1$, il P-value $P(Z < u) = P(Z > -u) = 1 - 0.8413 \approx 0.15487$ cioè 15.87%, quindi non abbiamo evidenza che la cura sia realmente efficace.