Matematica II - ING ELT
Appello del 28/7/2006

Nome e cognome: ....

Scegliere una delle opzioni sottostanti **Matricola:** ....

☐ **Recupero I parte** ☐ **Recupero II parte** ☐ **Scritto completo**

Esercizio 1 Calcolare i coefficienti di Fourier della funzione

$$f(x) = |x| \qquad x \in [-\pi, \pi].$$

Mostrare che

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Soluzione. Poiché la funzione è pari, si ha $b_n = 0$ per ogni $n = 1, 2, \ldots$. Facilmente si trova che $a_0 = \pi$; integrando per parti si ottiene

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(nx) \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ -\frac{4}{\pi n^2} & n \text{ dispari.} \end{cases}$$

Quindi

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)^2} \cos((2n+1)x);$$

se $x = 0$ si ha l'asserto.

Esercizio 2

1. Calcolare l'area del dominio descritto in coordinate polari da

$$D := \left\{(\rho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \rho \geq \vartheta^2 \,;\, \vartheta \geq \rho^2 \,;\, \rho \geq 0\right\}$$

Data la funzione

$$f(x,y) \,=\, xy\,\mathrm{e}^{-2x^2-2y^2}$$

2. Determinare i punti stazionari di $f(x,y)$ e studiarne la natura

3. Calcolare i piani tangenti al grafico in $P_1 \equiv (1,1,f(1,1))$ e in $P_2 \equiv \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)$

Soluzione. Disegniamo il dominio nel piano di coordinate (ϑ,ρ) gli estremi del dominio sono rappresentati da due parabole nel piano (ϑ,ρ). I punti di intersezione sono $(0,0)$ e $(1,1)$.

$$\begin{aligned}
\int_D dxdy \,&=\, \int_D \rho\, d\rho d\vartheta \,=\, \int_0^1 d\vartheta \int_{\vartheta^2}^{\sqrt{\vartheta}} \rho\, d\rho \,=\, \int_0^1 d\vartheta \left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_{\vartheta^2}^{\sqrt{\vartheta}} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\vartheta - \vartheta^4\right) d\vartheta \,=\, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right) \,=\, \frac{3}{20} \\
\nabla f \,&=\, \mathrm{e}^{-2x^2-2y^2}\left(y-4x^2y, x-4xy^2\right)
\end{aligned}$$

che ha punti stazionari in

$$A \equiv (0,0) \quad B \equiv \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \quad C \equiv \left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) \quad D \equiv \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \quad E \equiv \left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

Poiché la funzione è continua e $lim_{\rho+\infty} f(\rho\cos(\theta),\rho\sin(\theta)) = 0$ uniformemente rispetto a θ allora ammette almeno un massimo ed un minimo assoluti (provate a vedere perché). Per simmetria ($f(x,y) = -f(-x,y) = -f(x,-y)$) A è di sella (la funzione cambia segno in ogni intorno dell'origine) e B e E hanno la stessa natura (massimi, minimi o non estremanti). Ancora per simmetria C e D sono estremanti se e solo se lo sono B ed E e hanno natura opposta (minimi se B è massimo, massimi se B è minimo). Poiché il massimo assoluto è un punto di questi e $f(B) > 0 > f(C)$ allora B e E sono punti di massimo assoluto forti e C e D sono minimo assoluto forti.

Altro metodo consiste nel calcolare la matrice hessiana

$$H = 4\mathrm{e}^{-2x^2-2y^2}\begin{pmatrix} xy\left(4x^2-3\right) & \left(4x^2-1\right)\left(4y^2-1\right) \\ \left(4x^2-1\right)\left(4y^2-1\right) & xy\left(4y^2-3\right) \end{pmatrix}$$

e calcolata nei punti stazionari d:

$$H_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad H_B = H_E = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\mathrm{e}} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\mathrm{e}} \end{pmatrix} \qquad H_C = H_D = \begin{pmatrix} \frac{2}{\mathrm{e}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\mathrm{e}} \end{pmatrix}$$

E quindi A è punto di sella, B e E sono massimi, C e D sono minimi. L'equazione del piano tangente

$$z = f(x_0, y_0) + \partial_x f(x_0.y_0) \cdot (x - x_0) + \partial_y f(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

si particolarizza in $(1/2, 1/2, f(1/2, 1/2))$ come $z = 1/4e$ ed in $(1, 1, f(1, 1))$ come $z = 7e^{-4} - 3e^{-4}(x + y)$.

Esercizio 3 Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F} = \frac{2x}{(x^2+y^2)^2}\mathbf{i} + \frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\mathbf{j}$$

1. Verificare che è irrotazionale.
2. Specificare un dominio dove $\mathbf{F}$ ammette un potenziale e calcolarlo.
3. Calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la curva $\gamma_1 : (1, 1+t^2)\ t \in [0,1]$
4. Si considerino le curve *chiuse*, per $t \in [0, 2\pi]$

   $$\gamma_2 : (\cos t, \sin t) \qquad \text{e} \qquad \gamma_3 : (3+\cos t, \sin t)$$

   Si può affermare dal solo fatto che $\mathbf{F}$ è irrotazionale in tutto $\mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$ che il lavoro lungo γ_2 sia nullo? E lungo γ_3? Motivare le risposte.

Soluzione.

1. Poiché $F_1(a,b) = F_2(b,a)$ allora $\partial_y F_1(a,b) = \partial_x F_2(b,a)$ pertanto basta verificare che $\partial_y F_1(a,b) = \partial_y F_2(b,a)$ infatti

   $$\partial_y F_1(a,b) = -\frac{8ab}{(a^2+b^2)^3}.$$

2. $U(x,y) = \int \frac{2x}{(x^2+y^2)^2}dx = \left(t = x^2\right) = \int \frac{dt}{(t+y^2)^2} = -\frac{1}{x^2+y^2} + H(y)$. Usiamo la condizione $\frac{\partial U}{\partial y} = F_2$. $-\frac{2y}{x^2+y^2} + H'(y) = -\frac{2y}{x^2+y^2}$ e quindi $H(y) = c = 0$ per arbitrarietà della costante.

   $$U(x,y) = -\frac{1}{x^2+y^2}$$

   Quindi, avendo calcolato un potenziale su $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$, la forma è esatta.

3. gli estremi della curva sono $(1,1)$ e $(1,2)$ per cui $L = U(1,2) - U(1,1) = -\frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$

4. La risposta per γ_2 è no, perché $\mathbf{F}$ è sicuramente conservativo in ogni dominio semplicemente connesso, ma $\mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$ non è semplicemente connesso (la curva γ_2 è la circonferenza unitaria che circonda il punto singolare (origine)). Tuttavia il lavoro è nullo perché, in virtù del punto (2), la forma è esatta. Per quanto riguarda la curva γ_3 invece la risposta è positiva in quanto può essere immersa in un sottoinsieme semplicemente connesso (ad esempio $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$).

Esercizio 4 Il numero di incidenti in in una settimana su una certa strada ha distribuzione di Poisson di parametro λ.

a) Si determini λ affinchè la probabilità che vi sia almeno un incidente in una settimana sia 0.9.

b) Con il valore calcolato in precedenza si determini la probabilità di non avere incidenti in un giorno ed il numero medio di incidenti in un anno (52 settimane).

c) Mantenendo lo stesso valore per λ si calcoli la probabilità che vi siano almeno 3 incidenti in 3 settimane.

d) Calcolare il numero di settimane minimo affinché la probabilità di avere almeno 200 incidenti sia non inferiore al 90%.

Soluzione.

a) Il numero di incidenti in t settimane è una variabile aleatoria X_t di Poisson di parametro $t\lambda$. Pertanto dalla relazione $0.9 = \mathbb{P}(X_1 \geq 1) = 1 - \exp(-\lambda)$ si ottiene $\lambda = \ln(10) \approx 2.3026$.

b) La variabile aleatoria Y che conte il numero di incidenti in un giorno è di poisson con parametro $\ln(10)/7 \approx 0.32894$ da cui $\mathbb{P}(Y = 0) = \exp(-0.32894) = 0.1^{1/7} \approx 0.7197$. $\mathbb{E}(X_{52}) = 52\mathbb{E}(X_1) = 52\lambda \approx 119.73$.

c)
$$\mathbb{P}(X_3 \geq 3) = 1-\mathbb{P}(X_3 \leq 2) = 1-\left(1 + 3\lambda + \frac{9\lambda^2}{2}\right)\exp(-3\lambda) =\approx 1-0.03177 = 0.96823$$

d) Utilizzando l'approssimazione normale per la legge binomiale $P(n\lambda)$ si ha
$$0.9 \leq \mathbb{P}\left(X_n \geq 199.5\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{200 - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\right)$$
che, con la sostituzione $t = \sqrt{n}$ (che implica chiaramente $t \geq 0$), diviene
$$t^2 \ln(10) - q_{0.9}\sqrt{\ln(10)}t - 199.5 \geq 0$$
(con $q_{0.9} \approx 1.2815$) la cui unica soluzione accettabile è $t \geq 9.74$. Pertanto $n \geq (9.74)^2 \approx 94.86$ cioè $n \geq 95$.

Esercizio 5 Ad un quiz televisivo viene analizzato il tempo intercorrente tra domande e risposte. Sulla base di 20 domande / risposte si ottiene una media campionaria pari a 4 sec. ed un varianza campionaria pari a 10 sec^2.

1. Si determini un intervallo di confidenza al livello del 90% per la media.
2. Al livello $\alpha = 0.1$ è possibile accettare l'ipotesi nulla che la media del tempo tra domanda e risposta sia pari a 6 secondi?
3. Stimare il P-value del precedente test.

Soluzione.

1. essendo anche la varianza incognita, l'IC per la al livello di confidenza del 90% è pari a

$$\begin{aligned} \bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{1+\alpha}{2};n-1} &\leq \mu \leq \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{1+\alpha}{2};n-1} \\ 3.773 &\leq \mu \leq 5.227 \end{aligned}$$

2. Ovviamente poiché 6 non appartiene all'intervallo di confidenza calcolato in precedenza, si ha che l'ipotesi nulla viene rifiutata al $(100 - 90)\% = 10\%$.

   Alternativamente si può calcolare la regione di rifiuto del test

$$\left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \right| > t_{1-\alpha/2;n-1}.$$

   Siccome

$$\left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \right| = 2.828$$

   e $t_{1-\alpha/2;n-1} = t_{0.95;19} = 1.729131$, rifiutiamo l'ipotesi nulla al livello del 10%.

3. Poiché $t_{0.99;19} = 2.539482 < 2.828 < 2.860943 = t_{0.995;19}$ allora $0.01 < \bar{\alpha} < 0.02$.

Esercizio 6 Consideriamo la seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < -1; \\ x + \lambda & \text{per } -1 \leq x < 0; \\ \frac{1}{2}\lambda^4 e^{-\lambda^2 x} & \text{per } x \geq 0; \end{cases}$$

con $\lambda > 0$.

1. Determinare tutti i valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ tali per cui f sia una funzione di densità?
2. Si scelga un valore per λ soddifacente le richieste del punto precedente e sia X la variabile aleatoria di densità f.

   Si determinino $P(-2 < X < 0)$ e $P(0 < X < 1)$.
3. Calcolare il valore atteso e la varianza di X.

Soluzione.

1. La condizione $f(x) \geq 0$ per (quasi) ogni x equivale a $\lambda + x \geq 0$ per ogni $x \in [-1, 0)$ cioè $\lambda \geq 1$.

   $$1 = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} (x + \lambda) \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_{0}^{+\infty} \lambda^4 e^{-\lambda^2 x} \mathrm{d}x = \lambda - \frac{1}{2} + \frac{\lambda^2}{2}$$

   equivale a $\lambda = 1$ o $\lambda = -3$. L'unica soluzione comune risulta quindi $\lambda = 1$.
2. Evidentemente

   $$\mathbb{P}(-2 < X < 0) = \int_{-2}^{0} f(x) \mathrm{d}x = (x^2/2 + x)|_{-1}^{0} = 1/2$$
   $$\mathbb{P}(0 < X < 1) = \int_{0}^{1} f(x) \mathrm{d}x = -e^{-x}/2|_{-1}^{0} = (1 - e^{-1})/2.$$
3.

   $$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) \mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} (x^2 + x) \mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{2} x e^{-x} \mathrm{d}x = \frac{1}{3};$$
   $$\mathrm{Var}(X) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) \mathrm{d}x - \frac{1}{9} = \int_{-1}^{0} (x^3 + x^2) \mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{2} x^2 e^{-x} \mathrm{d}x - \frac{1}{9} = \frac{35}{36}.$$