

Matematica II: Analisi B
Docente: Dott. F. Zucca

I prova in Itinere - 8 maggio 2006

Nome e cognome: **Matricola:**

Esercizio 1 Si studi la convergenza puntuale ed uniforme della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 e^n - n}.$$

Soluzione. Da un noto teorema il raggio di convergenza

$$R = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 e^n - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 e^n - n} = e$$

Poiché $ne^n > 1$ per ogni $n \geq 1$, la serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2 e^n - n} < +\infty$$

dal momento che $e^n/(n^2 e^n - n) \sim 1/n^2$ che è sommabile. Pertanto essendo assolutamente convergente in $x = e$ è uniformemente convergente in $\{x : |x| \leq e\}$.

Esercizio 2 Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Dimostrare che la funzione è continua in $(0, 0)$
2. Calcolare la derivate direzionali in $(0, 0)$ rispetto ad un versore generico $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$
3. Verificare se vale o no la formula del gradiente ($D_{\mathbf{v}}f(0, 0) = \nabla f(0, 0) \cdot \mathbf{v}$)
4. La funzione è differenziabile nell'origine?
5. L'origine è un estremante?
6. Determinare tutti gli estremanti e specificarne la natura.

Soluzione.

1. La funzione è continua; per verificarlo passare alle coordinate polari e mostrare che il limite per $\rho \rightarrow 0$ è 0 uniformemente rispetto a $\theta \in [0, 2\pi)$.
2. Lungo un versore qualsiasi

$$D_{(v_1, v_2)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \frac{t^3 v_1 v_2^2}{t^2 (v_1^2 + v_2^2)} = v_1 v_2^2.$$

In particolare le derivate parziali sono nulle.

3. Non si applica la formula perché $f_x = 0$ e $f_y = 0$ implica $D_{\mathbf{v}}f(0, 0) \equiv 0$ che contraddice il risultato del punto precedente.
4. Non è differenziabile perché non vale la formula del gradiente.
5. Poiché la funzione non è costante in nessun intorno aperto dell'origine e vale $f(x, y) = -f(-x, y)$ l'origine, in cui la funzione è nulla, non può essere un estremante.
6. L'origine è stata discussa al punto precedente. Poiché il segno della funzione al di fuori degli assi coincide con il segno di x (mentre è nulla sugli assi) si ha immediatamente che i punti del tipo $(x, 0)$ con $x > 0$ (risp. $x < 0$) sono minimi (risp. massimi) locali deboli, mentre i punti

del tipo $(0, y)$ non possono essere estremanti perché la funzione cambia segno in ogni intorno. Al di fuori degli assi, per esempio lungo una retta di equazioni parametriche $(v_1 t, v_2 t)$ la funzione vale

$$f(v_1 t, v_2 t) = \frac{t v_1 v_2^2}{(v_1^2 + v_2^2)}$$

che non ammette estremanti.

Lo stesso risultato si sarebbe potuto ottenere con lo studio del differenziale.

Esercizio 3 Cercare la soluzione generale della seguente equazione differenziale

$$y' = y \sin(x) + \sin(x) \cos(x).$$

Definita φ la soluzione soddisfacente $\varphi(-\pi/2) = 1$, calcolare

$$\int_A (u - v)\varphi(u + v)du dv$$

dove $A = \{|u| \leq 1, |v| \leq 1\}$.

Suggerimento: si ricordi che integrando opportunamente per parti una funzione del tipo $e^{f(x)}f'(x)g(x)$ si ottiene $e^{f(x)}g(x) - \int e^{f(x)}g'(x)dx$. Prima di affrontare il calcolo esplicito dell'integrale si studino eventuali simmetrie dell'integranda e dell'insieme di integrazione.

Soluzione. La soluzione generale dell'omogenea è $y = ke^{-\cos(x)}$; la soluzione particolare è pertanto della forma

$$y = e^{-\cos(x)}v(x)$$

dove v soddisfa

$$v' = e^{-\cos(x)} \cos(x) \sin(x).$$

Integrando per parti si ottiene una primitiva $v = (1 - \cos(x))e^{\cos(x)}$ e la soluzione generale

$$y = ke^{-\cos(x)} - (\cos(x) - 1).$$

Imponendo la condizione $y(-\pi/2) = 1$ si ha $k = 0$ e quindi

$$\varphi(x) = -(\cos(x) - 1).$$

Con la trasformazione di coordinate

$$x(u, v) := u + v \quad y(u, v) := u - v$$

il cui determinante è pari a 2 si ha

$$\int_A (u - v)(1 - \cos(u + v))du dv = \frac{1}{2} \int_Q y(1 - \cos(x))dx dy$$

dove $Q = \{|x + y| \leq 2, |x - y| \leq 2\}$. poiché l'insieme di integrazione è simmetrico rispetto all'asse delle x e l'integranda (che è integrabile) è dispari rispetto a y , si ha che l'integrale è nullo.