$\boxed{99432}$

Matematica II: Analisi B
Docente: Dott. F. Zucca

I prova in Itinere - 8 maggio 2006

Nome e cognome: .... **Matricola:** ....

Esercizio 1 Si studi la convergenza puntuale ed uniforme della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2 - ne^{-n}}.$$

Soluzione. Da un noto teorema il raggio di convergenza

$$R = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 - ne^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 - ne^{-n}} = 1$$

Poiché $n > e^{-n}$ per ogni $n \geq 1$, la serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - ne^{-n}} < +\infty$$

dal momento che $1/(n^2 - ne^{-n}) \sim 1/n^2$ che è sommabile. Pertanto essendo assolutamente convergente in $x = -1$ è uniformemente convergente in $\{x : |x| \leq 1\}$.

Esercizio 2 Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Dimostrare che la funzione è continua in $(0,0)$
2. Calcolare la derivate direzionali in $(0,0)$ rispetto ad un versore generico $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$
3. Verificare se vale o no la formula del gradiente ($\mathrm{D}_\mathbf{v} f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \mathbf{v}$)
4. La funzione è differenziabile nell'origine?
5. L'origine è un estremante?
6. Determinare tutti gli estremanti e specificarne la natura.

Soluzione.

1. La funzione è continua; per verificarlo passare alle coordinate polari e mostrare che il limite per $\rho \to 0$ è 0 uniformemente rispetto a $\theta \in [0, 2\pi)$.
2. Lungo un versore qualsiasi

   $$D_{(v_1,v_2)} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \frac{t^3 v_1^2 v_2}{t^2 \left(v_1^2 + v_2^2\right)} = v_1^2 v_2.$$

   In particolare le derivate parziali sono nulle.
3. Non si applica la formula perché $f_x = 0$ e $f_y = 0$ implica $\mathrm{D}_\mathbf{v} f(0,0) \equiv 0$ che contraddice il risultato del punto precedente.
4. Non è differenziabile perché non vale la formula del gradiente.
5. Poiché la funzione non è costante in nessun intorno aperto dell'origine e vale $f(x,y) = -f(x,-y)$ l'origine, in cui la funzione è nulla, non può essere un estremante.
6. L'origine è stata discussa al punto precedente. Poiché il segno della funzione al di fuori degli assi coincide con il segno di y (mentre è nulla sugli assi) si ha immediatamente che i punti del tipo $(0,y)$ con $y > 0$ (risp. $y < 0$) sono minimi (risp. massimi) locali deboli, mentre i punti

del tipo $(x, 0)$ non possono essere estremanti perché la funzione cambia segno in ogni intorno. Al di fuori degli assi, per esempio lungo una retta di equazioni parametriche $(v_1 t, v_2 t)$ la funzione vale

$$f(v_1 t, v_2 t) = \frac{t v_1^2 v_2}{\left(v_1^2 + v_2^2\right)}$$

che non ammette estremanti.

Lo stesso risultato si sarebbe potuto ottenere con lo studio del differenziale.

Esercizio 3 Cercare la soluzione generale della seguente equazione differenziale
$$y' = y\cos(x) + \sin(x)\cos(x).$$
Definita φ la soluzione soddisfacente $\varphi(0) = -1$, calcolare
$$\int_A (u-v)\varphi(u+v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
dove $A = \{|u| \leq 1, |v| \leq 1\}$.
Suggerimento: si ricordi che integrando opportunamente per parti una funzione del tipo $e^{f(x)}f'(x)g(x)$ si ottiene $e^{f(x)}g(x) - \int e^{f(x)}g'(x)\mathrm{d}x$. Prima di affrontare il calcolo esplicito dell'integrale si studino eventuali simmetrie dell'integranda e dell'insieme di integrazione.

Soluzione. La soluzione generale dell'omogenea è $y = ke^{\sin(x)}$; la soluzione particolare è pertanto della forma
$$y = e^{\sin(x)}v(x)$$
dove v soddisfa
$$v' = e^{\sin(x)}\cos(x)\sin(x).$$
Integrando per parti si ottiene una primitiva $v = -(\sin(x)+1)e^{-\sin(x)}$ e la soluzione generale
$$y = ke^{\sin(x)} - (\sin(x)+1).$$
Imponendo la condizione $y(0) = -1$ si ha $k = 0$ e quindi
$$\varphi(x) = -(\sin(x)+1).$$
Con la trasformazione di coordinate
$$x(u,v) := u+v \qquad y(u,v) := u-v$$
il cui determinante è pari a 2 si ha
$$\int_A (u-v)(-\sin(u+v)-1)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_Q y(-\sin(x)-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
dove $Q = \{|x+y| \leq 2, |x-y| \leq 2\}$. poiché l'insieme di integrazione è simmetrico rispetto all'asse delle x e l'integranda (che è integrabile) è dispari rispetto a y, si ha che l'integrale è nullo.