

Matematica II: Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

ELT A-Z

Docente: dott. F. Zucca

Esercitazione # 6

1 Test ed intervalli di confidenza per una popolazione

Esercizio n. 1

Il calore (in calorie per grammo) emesso da un composto di cemento è (approssimativamente) normalmente distribuito di deviazione standard nota $\sigma = 2$. Si vuole testare

$$H_0 : \mu = 100$$

contro

$$H_1 : \mu \neq 100$$

con un campione di dimensione $n = 9$.

1. Se la regione di accettazione fosse data da $98.5 \leq \bar{x} \leq 101.5$, quale sarebbe l'errore di prima specie α ?
2. Determinare l'errore di seconda specie β e la potenza del test quando la vera media del calore è pari a 103.
3. Determinare l'errore di seconda specie β quando la vera media del calore è pari a 105. Tra il β appena trovato e quello trovato nel punto 2., quale dei due è più piccolo e perché?

Esercizio n. 2

Un'azienda produce anelli per i pistoni delle automobili. E' noto che il diametro di tali anelli è approssimativamente normalmente distribuito ed ha deviazione standard $\sigma = 0.001$ mm. Da un campione di $n = 15$ anelli, inoltre, si ricava una media campionaria $\bar{x} = 74.036$ mm.

Si vuole testare l'ipotesi che la media del diametro degli anelli sia uguale a 74.035 mm. ad un livello di significatività $\alpha = 5\%$ e si utilizzi sia il punto di vista dell'acquirente che quello del venditore.

1. Costruire la regione di accettazione dell'ipotesi enunciata sopra.
2. Quale conclusione possiamo trarre con i dati a noi disponibili?

Esercizio 3

Supponiamo che la vita (in ore) di una lampadina da 75 watt sia approssimativamente normalmente distribuita ed abbia una deviazione standard pari a $\sigma = 25$ ore. Un campione di 20 lampadine ha una media (campionaria) di vita $\bar{x} = 1014$ ore.

1. E' ragionevole supporre che la media di vita delle lampadine superi 1000 ore? Usare un livello di significatività $\alpha = 5\%$.
2. Calcolare il $P - value$ del test precedente.

Esercizio 4

Il tasso di un processo chimico è studiato. Di tale tasso sono note la deviazione standard $\sigma = 8$ e la media campionaria $\bar{x} = 88.48\%$, ottenute da un campione di dimensione $n = 100$.

1. Determinare il $P - value$ del test in cui ci si domanda se sia ragionevole che la media del tasso non sia 90%.
2. Quali conclusioni possiamo trarre ai livelli di significatività del 5% e del 6%?

Esercizio 5

(vedi Montgomery)

Un fabbricante di fibra tessile sta studiando un nuovo filato, la cui forza di allungamento, di media μ , ha una deviazione standard di 0.3 Kg. L'azienda desidera verificare l'ipotesi

$$H_0 : \mu = 14$$

contro

$$H_1 : \mu < 14,$$

usando un campione di 5 esemplari.

1. Qual è la probabilità di errore del I tipo se la regione critica è definita da $\bar{x} < 13.7$ Kg.?
2. Trovare β per il caso in cui la vera forza di allungamento valga 13.5 Kg.
3. Qual è la potenza del test del pto 2.?
4. Trovare i limiti della regione critica tale per cui l'errore del primo tipo sia pari a 0.01.
5. Ripetere i pti precedente nel caso in cui il campione abbia dimensione $n = 16$ e la regione critica sia la stessa di prima.

2 Intervalli di confidenza per la media (con varianza nota)

Esercizio 6

Sappiamo che un intervallo di confidenza al 95% per la media di una popolazione normalmente distribuita è dato da (11.4104; 13.8896). Se la varianza è pari a 6:

1. quale era la media campionaria della popolazione ?
2. qual è la dimensione del campione dal quale abbiamo determinato l'intervallo di confidenza in questione?

Esercizio 7

La lunghezza (in cm.) delle mine per matita di una certa marca è distribuita come una variabile aleatoria gaussiana. Supponiamo che la precisione dello strumento che produce le mine sia nota e che pertanto la deviazione standard della lunghezza delle mine sia pari a $\sigma = 0.1$.

Misurando dieci mine, otteniamo i seguenti valori:

12.21; 12.33; 12.84; 12.97; 13.22;
12.93; 13.07; 13.52; 13.23; 13.01

1. Determinare un intervallo di confidenza al 95% per la lunghezza media delle mine.
2. Mantenendo lo stesso livello di confidenza, quante mine occorrerebbe misurare per avere un intervallo di ampiezza inferiore o al più uguale a 10^{-2} cm.?

2.1 Test su media (con varianza non nota)

Esercizio 8

L'etichetta delle bottiglie di champagne Veuve Coquelinot dichiara un contenuto di 730 ml. Il produttore decide di controllare questa affermazione e su 81 bottiglie esaminate riscontra una media campionaria $\bar{x} = 726$ ml. ed una varianza campionaria $s^2 = 625$.

Supponendo che la quantità di champagne contenuta in ogni bottiglia si possa modellizzare con una v.a. normale, si può concludere (al livello di significatività $\alpha = 5\%$) che in media le bottiglie contengono meno di quanto dichiarato?

Esercizio 9

L'altezza media delle reclute alla visita di leva nel 1970 era di 169 cm.

121 reclute vengono scelte a caso nel 1980 e da queste vengono trovate una media campionaria $\bar{x} = 171$ cm. e una varianza campionaria $s^2 = 85$. Si può affermare (al livello di significatività $\alpha = 5\%$) che l'altezza media delle reclute è rimasta invariata?

Esercizio 10

Nella produzione di semiconduttori non è possibile controllare esattamente la resistenza degli elementi prodotti. Supponiamo che vengano misurati i valori della resistenza per $n = 81$ semiconduttori, ottenendo una media campionaria $\bar{x} = 1.2$ ed una varianza campionaria $s^2 = 0.4$.

1. Determinare l'intervallo bilaterale di confidenza al 95% per la media della resistenza dei semiconduttori prodotti.
2. Al livello di significatività $\alpha = 5\%$, è possibile accettare l'ipotesi nulla

$$H_0 : \mu = 1.3$$

contro

$$H_1 : \mu \neq 1.3 ?$$

Esercizio 11

Vengono effettuate 20 misurazioni della concentrazione di un certo enzima nel sangue di diversi individui e si osservano una media campionaria $\bar{x} = 1.23$ ed una varianza campionaria $s^2 = 0.4$.

1. Supponendo che i valori di questa concentrazione seguano una distribuzione normale (con entrambi i parametri ignoti!), qual è un intervallo di fiducia al livello 95% per la media della concentrazione?

2. Quale sarebbe l'intervallo di cui sopra se la concentrazione a cui si è interessati fosse distribuita come una normale di varianza nota $\sigma^2 = 0.4$?
3. Quale tra i due intervalli trovati in 1. ed in 2. è più ampio? Il risultato ottenuto sembra ragionevole?

2.2 Test su varianza

Esercizio 12

La quantità di zucchero contenuta in un succo di pesca è normalmente distribuita.

Si vuole testare l'ipotesi

$$H_0 : \sigma^2 = 18 \text{ mg.}^2$$

contro l'ipotesi alternativa

$$H_1 : \sigma^2 \neq 18 \text{ mg.}^2$$

1. Se da un campione di $n = 10$ succhi di pesca otteniamo una varianza campionaria $s^2 = 23.04 \text{ mg.}^2$, possiamo accettare oppure no l'ipotesi nulla ad un livello $\alpha = 5\%$?
2. Determinare l'intervallo di confidenza bilaterale al 98% per σ .
3. Con l'aiuto del punto 2., che cosa potremmo concludere circa l'ipotesi nulla ad un livello $\alpha = 2\%$?
4. Calcolare un estremo superiore per σ^2 al 99%.
5. Calcolare un estremo inferiore per σ^2 al 99%.

Esercizio 13

La margarina di una certa marca viene analizzata con lo scopo di determinare il livello di grassi insaturi (in percentuale) in essa contenuti.

Un campione di 6 confezioni fornisce i seguenti risultati:

16.6; 17.1; 17.4; 16.8; 16.4; 17.1

1. Sulla base del campione precedente, testare $H_0 : \sigma^2 = 1.0$ usando un'ipotesi alternativa bilaterale e ad un livello $\alpha = 2\%$.
2. Che cosa possiamo concludere se la varianza campionaria fosse uguale a quella del punto 1., ma la dimensione del campione fosse $n = 25$?

2.3 Test su una proporzione

Esercizio 14

In 500 lanci di una moneta (truccata), è uscita testa 223 volte.

E' ragionevole "scommettere" che la probabilità p che esca testa sia superiore al 40%? E al 50% ad un livello di significatività pari al 5%? Testare l'ipotesi nulla $p = 0.5$ ad un livello di significatività del 5%. Ripetere l'esercizio nel caso in cui sia uscita testa 233 volte.

3 Svolgimenti

Esercizio 1

Indichiamo con X la variabile aleatoria che rappresenta il calore emesso dal cemento. Per ipotesi, sappiamo che X è distribuito come $N(\mu; 4)$.

1. L'errore di prima specie α è dato da:

$$\begin{aligned}\alpha &= \mathbb{P}(\text{rigettare } H_0 \text{ dato che } H_0 \text{ è vera}) = \\ &= \mathbb{P}(\bar{X} < 98.5 \text{ oppure } \bar{X} > 101.5 \mid \mu = 100) = \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X} - 100}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{98.5 - 100}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) + \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X} - 100}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{101.5 - 100}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \\ &= \phi(-2.25) + 1 - \phi(2.25) = 2(1 - \phi(2.25)) = 0.02445,\end{aligned}$$

dove ϕ indica la funzione di ripartizione della normale standard.

2. L'errore di seconda specie β è dato da:

$$\begin{aligned}\beta &= \mathbb{P}(\text{accettare } H_0 \text{ dato che } H_0 \text{ è falsa}) = \\ &= \mathbb{P}(98.5 \leq \bar{X} \leq 101.5 \mid \mu = 103) = \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{98.5 - 103}{\frac{2}{3}} \leq \frac{\bar{X} - 103}{\frac{2}{3}} \leq \frac{101.5 - 103}{\frac{2}{3}}\right) = \\ &= \phi(-2.25) - \phi(-6.75) = \phi(6.75) - \phi(2.25) \simeq \\ &\simeq 1 - \phi(2.25) \simeq 0.012\end{aligned}$$

La potenza del test è definita come $(1 - \beta)$, pertanto vale all'incirca 0.988.

3. In questo caso, β è dato da:

$$\begin{aligned}\beta &= \mathbb{P}(\text{accettare } H_0 \text{ dato che } H_0 \text{ è falsa}) = \\ &= \mathbb{P}(98.5 \leq \bar{X} \leq 101.5 \mid \mu = 105) = \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{98.5 - 105}{\frac{2}{3}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq \frac{101.5 - 105}{\frac{2}{3}}\right) = \\ &= \phi(-5.25) - \phi(-9.75) \simeq 0\end{aligned}$$

Esercizio 2

Indichiamo con X la v.a. che rappresenta il diametro degli anelli dei pistoni. Per ipotesi X è distribuita come $N(\mu; 10^{-6})$.

Cominciamo con il punto di vista del venditore. La statistica test che si usa per questa verifica di ipotesi è $\bar{X}$ o, più precisamente, $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$. Per le ipotesi su X ed applicando il TLC, è noto che la regione di accettazione del test

$$\begin{array}{ll} H_0 & : \quad \mu = 74.035 \\ \text{contro } H_1 & : \quad \mu \neq 74.035 \end{array}$$

ad un livello di significatività α è data da

$$q_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq q_{1-\frac{\alpha}{2}}.$$

Dal punto di vista dell'acquirente invece

$$\begin{array}{ll} H_0 & : \quad \mu \neq 74.035 =: \mu_0 \\ \text{contro } H_1 & : \quad \mu = 74.035 \end{array}$$

ad un livello di significatività α la regione di rifiuto è data da

$$q_{\frac{1-\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq q_{\frac{1+\alpha}{2}},$$

ed il P -value è $\bar{\alpha} = 2\phi\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\right) - 1$.

1. Nel primo caso, $q_{0.975} = 1.959964$ e la regione di accettazione al livello di significatività $\alpha = 5\%$ risulta essere:

$$\mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}q_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \bar{X} \leq \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}q_{1-\frac{\alpha}{2}},$$

ovvero

$$74.03474 \leq \bar{X} \leq 74.03526$$

Nel secondo caso, $q_{0.5025} = 0.0627$ e la regione di accettazione al livello di significatività $\alpha = 5\%$ risulta essere:

$$\mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}q_{\frac{1+\alpha}{2}} \leq \bar{X} \leq \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}q_{\frac{1+\alpha}{2}},$$

ovvero

$$74.035 - 1.6191 \cdot 10^{-5} \leq \bar{X} \leq 74.035 + 1.6191 \cdot 10^{-5}$$

2. Nel primo caso $\bar{x} = 74.036$ è al di fuori della regione di accettazione, pertanto non possiamo accettare l'ipotesi nulla (al livello $\alpha = 5\%$); nel secondo caso invece $\bar{x} = 74.036$ cade nella regione di accettazione pertanto non possiamo rifiutare l'ipotesi nulla (al livello $\alpha = 5\%$).

Esercizio 3

Indichiamo con X la v.a. che rappresenta la vita della lampadina. Per ipotesi, sappiamo che X è distribuita come $N(\mu; 625)$, che $n = 20$ e che $\bar{x} = 1014$.

1. In questo caso siamo interessati a verificare l'ipotesi alternativa del test

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu \leq 1000 \\ \text{contro } H_1 &: \mu > 1000 \end{aligned}$$

ad un livello di significatività $\alpha = 5\%$.

E' noto che la regione di rifiuto per tale test è data da:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > q_{1-\alpha},$$

dove Z è approssimabile con una normale standard.

Nel nostro caso $q_{0.95} = 1.644854$ e

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{1014 - 1000}{25/\sqrt{20}} = 2.504396 > q_{0.95},$$

pertanto rifiutiamo l'ipotesi nulla al livello $\alpha = 5\%$. E' quindi "ragionevole" supporre che la media di vita delle lampadine superi 1000 ore.

2. Ricordiamo che il $P - value$ è il più piccolo livello di significatività α che porta a rifiutare l'ipotesi H_0 .

Nel caso di un'ipotesi alternativa $H_1 : \mu > \mu_0$,

$$P - value = 1 - \phi\left(\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right),$$

ovvero nel nostro caso $P - value = 1 - \phi(2.504396) = 0.006133$.

Esercizio 4

Indichiamo con X la v.a. che rappresenta il tasso del processo. Per ipotesi, sappiamo che $\sigma^2 = 64$, che $n = 100$ e che $\bar{x} = 88.48\%$. Siccome la dimensione del campione è molto grande, è lecito utilizzare il TLC per calcolare la regione di accettazione del test anche se X non è detto che sia normalmente distribuita.

1. In questo caso siamo interessati a verificare l'ipotesi

$$\begin{array}{ll} H_0 & : \mu = 90\% \\ \text{contro } H_1 & : \mu \neq 90\% \end{array}$$

Il P-value del test è dato da

$$\begin{aligned} P\text{-value} &= 2 \left(1 - \phi \left(\left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| \right) \right) = \\ &= 0.05744 \end{aligned}$$

2. Siccome $\alpha = 5\%$ è inferiore al P-value, allora possiamo accettare H_0 al livello $\alpha = 5\%$.

Siccome $\alpha = 6\%$ è superiore al P-value, allora dobbiamo rifiutare H_0 al livello $\alpha = 6\%$. Pertanto, ad un livello di significatività del 6% è ragionevole supporre che la media del tasso studiato non sia 90%.

Esercizio 5

1. L'errore di I tipo α è pari alla probabilità di rifiutare H_0 quando H_0 è vera.

$$\alpha = P(\bar{X} < 13.7 \text{ quando } \mu = 14)$$

Siccome $\bar{X} \sim N\left(\mu; \frac{\sigma^2}{n}\right)$ allora, se H_0 è vera e siccome $\sigma = 0.3$ e $n = 5$, abbiamo che:

$$\alpha = P(\bar{X} < 13.7 \text{ quando } \mu = 14) = P\left(\frac{\bar{X} - 14}{0.3/\sqrt{5}} < \frac{13.7 - 14}{0.3/\sqrt{5}}\right) = 1 - \phi(2.236) = 0.0126$$

2. L'errore del II tipo β è pari alla probabilità di non rifiutare H_0 quando H_0 è falsa.

$$\beta = P(\bar{X} \geq 13.7 \text{ quando } \mu = \mu_1 \neq 14)$$

Nel nostro caso $\mu_1 = 13.5$, $n = 5$ e $\sigma = 0.3$, quindi:

$$\begin{aligned} \beta &= P(\bar{X} \geq 13.7 \text{ quando } \mu = 13.5) = \\ &= 1 - P\left(\frac{\bar{X} - 13.5}{0.3/\sqrt{5}} < \frac{13.7 - 13.5}{0.3/\sqrt{5}}\right) = 1 - \phi(1.49) = 0.068 \end{aligned}$$

3. la potenza del test è semplicemente pari a $1 - \beta$, quindi pari a 0.932.
4. La regione critica con ipotesi alternativa H_1 è del tipo $\bar{X} < \delta$. Determiniamo δ tale che

$$\alpha = 0.01 = P(\bar{X} < \delta \text{ quando } \mu = 14)$$

Procedendo come prima, otteniamo

$$\begin{aligned} P(\bar{X} < \delta \text{ quando } \mu = 14) &= P\left(\frac{\bar{X} - 14}{0.3/\sqrt{5}} < \frac{\delta - 14}{0.3/\sqrt{5}}\right) = \phi\left(\frac{\delta - 14}{0.3/\sqrt{5}}\right) \\ \phi\left(\frac{\delta - 14}{0.3/\sqrt{5}}\right) &= 0.01 \Rightarrow \frac{\delta - 14}{0.3/\sqrt{5}} = -3.197 \\ \Rightarrow \delta &= 13.9571. \end{aligned}$$

5. Con gli stessi ragionamenti dei pti 1., 2. e 3., otteniamo che se $n=16$, allora:

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 - \phi(4) \simeq 0 \\ \beta &= 1 - \phi(8/3) \approx 1 - 0.9962 \approx 0.0038 \\ \text{potenza} &= 1 - \beta = 0.9962. \end{aligned}$$

Esercizio 6

Sappiamo che l'intervallo (bilaterale) di confidenza al 95% ($= \alpha$) per la media di una popolazione normale di varianza σ^2 e con un campione di dimensione n è dato da:

$$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{\frac{1+\alpha}{2}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{\frac{1+\alpha}{2}}.$$

Dai dati del problema, otteniamo che $\bar{x}$ e n devono risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \bar{x} - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{n}} q_{0.975} = 11.4104 \\ \bar{x} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{n}} q_{0.975} = 13.8896 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} \bar{x} = 12.65 \\ n = 15 \end{cases}$$

Esercizio 7

Dai 10 dati a disposizione sulla lunghezza delle mine, otteniamo una media campionaria pari a $\bar{x} = 12.933$.

1. L'intervallo bilaterale di confidenza al 95% per la media è dato quindi da

$$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{\frac{1+\alpha}{2}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{\frac{1+\alpha}{2}},$$

(dove $\alpha = 0.95$) ovvero da

$$\mu \in [12.871; 12.995]$$

2. Osserviamo innanzitutto che l'ampiezza dell'intervallo di confidenza per μ al livello α è pari a $\left[\left(\bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{\frac{1+\alpha}{2}} \right) - \left(\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{\frac{1+\alpha}{2}} \right) \right] = 2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{\frac{1+\alpha}{2}}$. Per avere un intervallo non più ampio di 10^{-2} , è necessario e sufficiente che

$$\begin{aligned} 2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1+\frac{\alpha}{2}} &\leq 10^{-2} \\ \sqrt{n} &\geq 200 \sigma q_{0.975} \\ n &\geq 1536.584 \end{aligned}$$

quindi la dimensione minima del campione è pari a $n = 1537$.

Esercizio 8

Indichiamo con X la v.a. che rappresenta il contenuto delle bottiglie di champagne. Per ipotesi X è distribuita come $N(\mu; \sigma^2)$, dove entrambi i parametri non sono noti. Indichiamo con $\bar{X}$ la media campionaria e con S^2 la varianza campionaria.

La statistica test che si usa per questa verifica di ipotesi è $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$ che, sotto ipotesi di normalità di X o di grandi dimensioni del campione, è distribuita come una $t(n-1)$, ovvero una t -student con $(n-1)$ gradi di libertà. E' anche noto che la regione di rifiuto del test

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu \geq 730 \\ \text{contro } H_1 &: \mu < 730 \end{aligned}$$

ad un livello di significatività α è data da

$$T := \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha, n-1} \equiv -1.6641,$$

dove $t_{\alpha, n-1}$ è definito da $\mathbb{P}(T < t_{\alpha, n-1}) = \alpha$, ovvero l'area della coda alla sinistra di $t_{\alpha, n-1}$ è pari a α .

Nel nostro caso, quindi, la regione di rifiuto al livello di significatività $\alpha = 5\%$ è data da:

$$\bar{X} < \mu_0 + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha, n-1} = 725.3774$$

Siccome la media campionaria a noi disponibile è $\bar{x} = 726$, non possiamo rifiutare l'ipotesi nulla, quindi non possiamo concludere che le bottiglie contengano meno di quanto dichiarato.

In altro modo avremmo potuto procedere calcolando il p-value (per mezzo della funzione di ripartizione della legge di Student con $n - 1$ gradi di libertà) $\bar{\alpha} = F_{T_{n-1}}((\bar{X} - \mu_0)\sqrt{n}/\sigma) \equiv 0.0769$.

Esercizio 9

Indichiamo con X l'altezza delle reclute nel 1980. Vogliamo testare l'ipotesi

$$H_0 : \mu = 169$$

contro

$$H_1 : \mu \neq 169$$

La regione di accettazione dell'ipotesi nulla al livello di significatività $\alpha = 5\%$ è data da

$$-1.9799 = -t_{0.975;120} \leq \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \leq t_{0.975;120} = 1.9799.$$

Siccome, nel nostro caso,

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \simeq 2.386$$

allora dobbiamo rifiutare l'ipotesi nulla, quindi non possiamo affermare che l'altezza delle reclute sia rimasta invariata.

Esercizio 10

Indichiamo con X la v.a che rappresenta la resistenza degli elementi prodotti.

1. L'intervallo bilaterale di confidenza per la media al $95\% = \alpha$ nel caso di media e varianza incognite è dato da

$$\bar{X} - t_{\frac{1+\alpha}{2}; n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{\frac{1+\alpha}{2}; n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

che nel nostro caso diventa

$$\mu \in [1.06; 1.34].$$

2. Siccome $\mu_0 = 1.2$ appartiene all'intervallo bilaterale che abbiamo appena trovato, allora possiamo accettare l'ipotesi nulla al livello $\alpha = 5\%$.

Esercizio 11

Indichiamo con X la v.a. che rappresenta la concentrazione dell'enzima nel sangue.

1. Ragionando come nell'esercizio precedente, otteniamo che, nel caso di media e varianza incognite, l'intervallo bilaterale al 95% per la media è dato da:

$$\mu \in [0.934; 1.526]$$

2. Nel caso di varianza nota pari a $\sigma^2 = 0.4$, si ottiene, invece, che l'intervallo di confidenza diventa

$$\mu \in [0.953; 1.507]$$

3. Ovviamente, è più ampio l'intervallo trovato in 1., dove la varianza è incognita e l'incertezza è maggiore.

Esercizio 12

Indichiamo con X la v.a. che rappresenta il contenuto di zucchero nei succhi. Per ipotesi X è distribuita come $N(\mu; \sigma^2)$, dove entrambi i parametri non sono noti. Indichiamo con S^2 la varianza campionaria.

La statistica test che si usa per una verifica di ipotesi sulla varianza è $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ che, sotto ipotesi di normalità di X o di grandi dimensioni del campione, è distribuita come una $\chi^2(n-1)$, ovvero una *chi-quadro* con $(n-1)$ gradi di libertà. E' anche noto che la regione di accettazione del test

$$\begin{aligned} H_0 &: \sigma^2 = 18 = \sigma_0^2 \\ \text{contro } H_1 &: \sigma^2 \neq 18 \end{aligned}$$

ad un livello di significatività α è data da

$$\chi_{\frac{\alpha}{2}, n-1}^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}^2.$$

1. Nel nostro caso, quindi, la regione di accettazione al livello di significatività $\alpha = 5\%$ è data da:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \in [2.7004; 19.023]$$

Siccome $\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = 11.57$ appartiene alla regione di accettazione, allora accettiamo l'ipotesi nulla al livello del 5%.

Si noti che in questo caso calcolare il p-value $\bar{\alpha}$ vuol dire prendere il minimo tra le soluzioni delle due equazioni

$$\chi_{\bar{\alpha}, n-1}^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}, \quad \chi_{1-\bar{\alpha}, n-1}^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}.$$

2. L'intervallo di confidenza al 98% ($=: \alpha$) per la varianza è dato da

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{1+\alpha}{2}, n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{1-\alpha}{2}, n-1}}$$

che, nel nostro caso essendo $\chi^2_{(1+\alpha)/2, n-1} = 21.66$ e $\chi^2_{(1-\alpha)/2, n-1} = 2.089$, corrisponde a

$$\sigma^2 \in [9.57; 99.32]$$

3. Con l'aiuto del punto precedente, possiamo accettare l'ipotesi nulla al livello di significatività $\alpha = 2\%$, siccome $\sigma_0^2 = 18$ appartiene all'intervallo di confidenza trovato sopra. D'altro canto, avendo accettato a livello 0.05 senz'altro si accetterà anche a livello 0.02.

4. Si ha che, essendo

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1),$$

allora

$$\mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \chi^2_{1-\alpha, n-1}\right) = \alpha$$

cioè

$$\mathbb{P}\left(\sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha, n-1}}\right) = \alpha.$$

Sostituendo il valore $\chi^2_{0.01, 9} = 2.0879$ si ha $\sigma^2 \in [0, 99.3151]$.

5. Similmente

$$\mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha, n-1}\right) = \alpha$$

cioè

$$\mathbb{P}\left(\sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha, n-1}}\right) = \alpha.$$

Sostituendo il valore $\chi^2_{0.99, 9} = 21.666$ si ha $\sigma^2 \in [9.5708, +\infty)$.

Esercizio 13

Indichiamo con X la v.a. che rappresenta il livello di grassi insaturi presenti nella margarina.

Vogliamo testare la seguente ipotesi nulla sulla varianza di X

$$H_0 : \sigma^2 = 1.0 = \sigma_0^2$$

contro l'ipotesi alternativa

$$H_1 : \sigma^2 \neq 1.0$$

Supponendo che X sia normalmente distribuita, la regione di accettazione (al livello di significatività α) per il test precedente è data da

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \leq \frac{(n-1) S^2}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}$$

Dai dati a noi noti, inoltre, ricaviamo che

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{6} [16.6 + 17.1 + 17.4 + 16.8 + 16.4 + 17.1] = 16.9 \\ s^2 &= \frac{1}{5} \sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})^2 = \\ &= \frac{1}{5} [(-0.3)^2 + (0.2)^2 + (0.5)^2 + (-0.1)^2 + (-0.5)^2 + (0.2)^2] = 0.136\end{aligned}$$

1. Osserviamo che la regione di accettazione dell'ipotesi nulla al livello di significatività $\alpha = 2\%$ è data da

$$\frac{(n-1) S^2}{\sigma_0^2} \in [0.5543; 15.086]$$

che contiene $\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = 0.68$. Quindi possiamo accettare l'ipotesi nulla!

2. Se il livello di significatività α e la varianza campionaria rimanessero uguali a quelle del punto precedente, ma $n = 25$, la regione di accettazione di H_0 diventerebbe:

$$\frac{(n-1) S^2}{\sigma_0^2} \in [10.8564; 42.980].$$

In questo caso, $\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = 24 \cdot 0.136 = 3.264$ non appartiene alla regione di accettazione, quindi dobbiamo rifiutare l'ipotesi nulla!

Esercizio 14

Indichiamo con X la v.a. che conta il numero di volte che esce testa. E' chiaro quindi che X è distribuita come una binomiale con percentuale di successo data da p .

Indichiamo con $\hat{p} := \frac{X}{n}$ la proporzione di teste in n lanci della moneta. $\hat{p}$, quindi, è uno stimatore di p .

La statistica test che si usa per una verifica di ipotesi su una proporzione è $\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ che, nel caso in cui $np > 5$ e $n(1-p) > 5$, è approssimabile con una normale standard.

Sia

$$H_0 : p \geq p_0 = 0.4$$

contro l'ipotesi alternativa

$$H_1 : p < p_0 = 0.4$$

e calcoliamo il P-value del test come

$$\bar{\alpha} = \phi\left(\frac{\bar{x}_n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}\right) = \phi\left(\frac{0.446 - 0.4}{\sqrt{0.4 \cdot 0.6/500}}\right) = \phi(2.00996) = 0.9821.$$

Poichè il P-value è molto vicino a 1, si accetta l'ipotesi nulla. Se ora l'ipotesi nulla è

$$H_0 : p \geq p_0 = 0.5$$

contro l'ipotesi alternativa

$$H_1 : p < p_0 = 0.5$$

e calcoliamo il P-value del test come

$$\bar{\alpha} = \phi\left(\frac{\bar{x}_n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}\right) = \phi\left(\frac{0.446 - 0.5}{\sqrt{0.5 \cdot 0.5/500}}\right) = \phi(-2.4150) = 0.0079.$$

Ad un livello di significatività del 5% l'ipotesi nulla è rifiutata. Consideriamo infine il seguente test

$$H_0 : p = p_0 = 0.5$$

contro l'ipotesi alternativa

$$H_1 : p \neq p_0 = 0.5$$

il cui P-value è

$$\bar{\alpha} = 2 - 2\phi\left(\left|\frac{\bar{x}_n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}\right|\right) = 2 - 2\phi\left(\left|\frac{0.446 - 0.5}{\sqrt{0.5 \cdot 0.5/500}}\right|\right) = 2 - 2\phi(2.4150) = 0.0157.$$

Ad un livello di significatività del 5% rifiutiamo nuovamente l'ipotesi nulla.

Sia

$$H_0 : p \geq p_0 = 0.4$$

contro l'ipotesi alternativa

$$H_1 : p < p_0 = 0.4$$

e calcoliamo il P-value del test come

$$\bar{\alpha} = \phi\left(\frac{\bar{x}_n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}\right) = \phi\left(\frac{0.466 - 0.4}{\sqrt{0.4 \cdot 0.6/500}}\right) = \phi(3.0125) = 0.9987.$$

Poichè ancora il P-value è molto vicino a 1, si accetta l'ipotesi nulla. Se ora l'ipotesi nulla è

$$H_0 : p \geq p_0 = 0.5$$

contro l'ipotesi alternativa

$$H_1 : p < p_0 = 0.5$$

il P-value è

$$\bar{\alpha} = \phi \left(\frac{\bar{x}_n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \right) = \phi \left(\frac{0.466 - 0.5}{\sqrt{0.5 \cdot 0.5/500}} \right) = \phi(-1.5205) = 0.0642.$$

Ad un livello di significatività del 5% l'ipotesi nulla questa volta è accettata. Consideriamo infine il test

$$H_0 : p = p_0 = 0.5$$

contro l'ipotesi alternativa

$$H_1 : p \neq p_0 = 0.5$$

il cui P-value è

$$\bar{\alpha} = 2 - 2\phi \left(\left| \frac{\bar{x}_n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \right| \right) = 2 - 2\phi \left(\left| \frac{0.466 - 0.5}{\sqrt{0.5 \cdot 0.5/500}} \right| \right) = 2 - 2\phi(1.5205) = 0.1284.$$

Ad un livello di significatività del 5% accettiamo nuovamente l'ipotesi nulla.