Matematica II - ING ELT
Appello del 16/9/2008

Nome e cognome: ....

Scegliere una delle opzioni sottostanti **Matricola:** ....

☐ **Recupero I parte** ☐ **Recupero II parte** ☐ **Scritto completo**

Esercizio 1 Discutere la convergenza della serie di Fourier della funzione, periodica di periodo 2π, che sull'intervallo $]-\pi,\pi[$, è definita da

$$f(x) := \sin\frac{x}{2}\,.$$

Soluzione.

Esercizio 2

Si consideri la seguente forma differenziale su $\Omega := \mathbb{R}\setminus\{(0,0)\}$

$$\omega := \frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x + \frac{x^3 - y^2x}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y.$$

1. Stabilire se ω è chiusa su Ω.
2. Stabilire se ω è esatta su Ω.
3. Calcolare l'integrale di linea $\int_\gamma \omega$ dove $\gamma(t) := (\cos t, 2\sin t)$ e $t \in [0,\pi]$

Soluzione.

1.
2. $$F(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$
3.

Esercizio 3 Studiare gli estremi relativi ed assoluti della seguente funzione

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}$$

Soluzione.

Esercizio 4 Si consideri la seguente funzione reale di variabile reale (dipendente da un parametro $c \in \mathbb{R}$)

$$f_c(x) := \begin{cases} c^2/4 & x = \pm 1/2 \\ (2c-1)/6 & x = 1 \\ (2c-1)/3 & x = -1 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

1. Calcolare tutti i valori di c affinché f_c sia una densità discreta.
2. Sia X una variabile aleatoria di densità f_c (per i valori di c calcolati al punto precedente): si calcoli la media e la varianza di X. Quanto vale $\mathbb{P}(X \geq 1/2)$? E quanto $\mathbb{P}(X > 1/2)$?
3. Siano $X_1, \dots, X_{100}$ variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione calcolata al punto (1). Calcolare (approssimativamente)
$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i < \frac{1}{2}\right).$$

Soluzione.

1. Le condizioni
$$\begin{cases} f_c(x) \geq 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\ \sum_x f_c(x) = 1 \end{cases}$$
sono equivalenti a
$$\begin{cases} c \geq 1/2 \\ \frac{c^2}{2} + \frac{2c-1}{3} + \frac{2c-1}{6} = 1 \end{cases}$$
cioè
$$\begin{cases} c \geq 1/2 \\ c^2 + 2c - 3 = 0 \end{cases}$$
che diviene
$$\begin{cases} c \geq 1/2 \\ c = 1 \text{ oppure } c = -3 \end{cases}$$
da cui si ha l'unica soluzione $c = 1$.

2.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_x x f_1(x) = -\frac{1}{6};\\
\operatorname{var}(X) &= \sum_x x^2 f_1(x) - \frac{1}{6^2} = \frac{43}{72} =: \sigma^2;\\
\mathbb{P}(X \geq 1/2) &= \sum_{x \geq 1/2} f_1(x) = \frac{5}{12};\\
\mathbb{P}(X > 1/2) &= \sum_{x > 1/2} f_1(x) = \frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$

3. Dal Teorema Centrale del Limite

$$
\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i \approx Y \sim \mathcal{N}\left(\frac{1}{6}, \frac{\sigma^2}{100}\right)
$$

pertanto, essendo $\sigma = \sqrt{43/72} \approx 0.7728$,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i < 1/2\right) &\approx \mathbb{P}(Y < 1/2) = \mathbb{P}\left(\frac{Y + 1/6}{\sigma/10} < \frac{1/2 + 1/6}{\sigma/10}\right)\\
&= \Phi\left(\frac{20}{3\sigma}\right) \Phi\left(8.6266\right) \approx 1.
\end{aligned}
$$

In questo caso la correzione di continuità risulta trascurabile.

Esercizio 5 Si vuole testare la velocità massima di una automobile sportiva. La casa dichiara una velocità max. di almeno 220 Km/h. Su 20 prove, la media campionaria delle velocità massime raggiunte è $\overline{x} = 215$. Per verificare l'affermazione della casa, si studi il test:

$$
H_0 : \mu \geq 220, \qquad H_1 : \mu < 220
$$

nelle due seguenti situazioni:

1. La varianza è nota ed è $\sigma = 15$. $\alpha = 1\%, 5\%, 10\%$. Calcolare il P-value.

2. La varianza stimata è $s = 17.3$. $\alpha = 1\%, 5\%, 10\%$. Stimare il P-value.

Soluzione.

1. Introduco la statistica test:

$$U := \frac{\overline{X} - 220}{15/\sqrt{20}}$$

dove $\overline{X}$ è la media campionaria. Il valore numerico è

$$u = \frac{215 - 220}{15/\sqrt{20}} = -1.49.$$

Il criterio di rifiuto di H_0 è $u < q_\alpha$ ($q_{0.01} \approx -2.33$, $q_{0.05} \approx -1.64$, $q_{0.1} \approx -1.28$) quindi il P-value è $P(Z < u) = P(Z > -u) = P(Z > 1.49) = 1 - \Phi(1.49) \approx 1 - 0.9319 = 0.0681$ cioè 6.81% e l'affermazione della casa costruttrice appare dubbia. Al 10% rifiuto H_0 mentre al 5% e 1% accetto H_0.

2. Introduco la statistica test:

$$U := \frac{\overline{X} - 220}{S/\sqrt{20}}$$

Il valore numerico è

$$u = \frac{215 - 220}{17.3/\sqrt{20}} = -1.29.$$

Il criterio di rifiuto di H_0 è $u < t_\alpha(19)$. Dalle tavole $t_{0.1}(19) = -t_{0.9}(19) = -1.328 < u$ mentre $t_{0.25,19} = 0.688 > u$, quindi al 10% accetto H_0 e al 25% la rifiuto. Dalle tavole segue che il P-value è compreso tra il 10% e il 15% e che accetto H_0 anche al 5% e 1%. Con un calcolatore si trova che il P-value esatto è $P(t < -1.29) = 1 - P(t < 1.29) \approx 11\%$.

Esercizio 6 Il tempo che intercorre tra il momento in cui un principiante della boxe riceve un pugno ed il pugno successivo è governato da una legge esponenziale.

1. Sapendo che la probabilità di ricevere un pugno prima che siano trascorsi dieci secondi da quello precedente è 1/2, calcolare la probabilità che debba attendere almeno 2 secondi dal primo pugno per ricevere il secondo.

2. Supponendo che i tempi che intercorrono tra i vari pugni siano indipendenti ed identicamente distribuiti e supponendo che dopo 10 pugni il nostro malcapitato vada KO, calcolare (utilizzando un'opportuna approssimazione) che vada KO nei primi 3 minuti. Qual è il minimo numero di pugni che deve saper incassare per non finire KO nei primi 3 minuti con probabilità pari almeno al 90%?

Soluzione. Sia X la **v.a.** che misura in secondi il tempo di attesa tra due pugni. Il testo ci dice che $X \sim Esp(\lambda)$. Innanzi tutto ricaviamo il valore del parametro. Sappiamo che $\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = 1 - \mathbb{P}(X < 10) = \mathbb{P}(X > 10) = e^{-10\lambda}$ da cui ricaviamo: $\lambda = \frac{\ln 2}{10}$

1. $\mathbb{P}(X > 2) = e^{-2\lambda} = e^{-\frac{\ln 2}{5}} = 2^{-1/5}$

2. Sia $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ dove $X_i \sim Esp(\lambda)$ rappresenta il tempo di attesa per l'i-esimo pugno. (Osserviamo che $S_n \sim \Gamma(n, \lambda)$ e dunque la condizione di applicabilità del TLC può ritenersi abbastanza soddisfatta anche per $n = 10$). In ogni caso applicando il Teorema Centrale del Limite si ha $S_n \simeq N\left(\frac{n}{\lambda}, \frac{n}{\lambda^2}\right)$ e $\mathbb{P}(S_n \leq 180) \simeq \Phi\left(\frac{180 - \frac{n}{\lambda}}{\frac{\sqrt{n}}{\lambda}}\right) \simeq \Phi\left(\frac{18 \ln 2 - 10}{\sqrt{10}}\right) \simeq 0.7832$.
   Ora troviamo $n : 1 - \Phi\left(\frac{180 - \frac{n}{\lambda}}{\frac{\sqrt{n}}{\lambda}}\right) \geq 0.9$. Siamo condotti alla risoluzione in $\mathbb{N}$ dell'equazione: $n - z_{0.9}\sqrt{n} - 18 \ln 2 \geq 0$ dalla quale ricaviamo $\sqrt{n} \geq 4.231$ e quindi $n \geq \lceil 17.9 \rceil = 18$.