Matematica II - ING ELT
Appello del 30/1/2009

Nome e cognome:

Scegliere una delle opzioni sottostanti

Matricola:

Recupero I parte **Recupero II parte** **Scritto completo**

Esercizio 1 Si consideri la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n + 1}.$$

1. Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza puntuale.
2. Discutere la convergenza uniforme.

Soluzione.

1. Per calcolare il raggio di convergenza usiamo il criterio del rapporto:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}+1}}{\frac{n}{2^n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2^n+1}{2^{n+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

Ne segue che che $R = 2$.

Agli estremi dell'intervallo, cioè per $x = -2$ e per $x = 2$, si ottengono rispettivamente le serie numeriche

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (-2)^n}{2^n + 1} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^n}{2^n + 1},$$

che non convergono.

Si conclude che l'insieme di convergenza puntuale della serie assegnata è

$$\{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 2\}.$$

2. Dalla teoria sappiamo che c'è convergenza uniforme su ogni sottoinsieme dell'intervallo $[-2 + \epsilon, 2 - \epsilon]$ per $\epsilon > 0$. Dal teorema del doppio limite inoltre se su A c'è convergenza uniforme allora 2 e -2 non possono essere punti di accumulazione di A . Quindi c'è convergenza uniforme su A se e solo se $A \subseteq [-2 + \epsilon, 2 - \epsilon]$ per qualche $\epsilon > 0$.

Esercizio 2 Si consideri la funzione

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Stabilire se f è continua nell'origine.
2. Calcolare le derivate direzionali nell'origine in tutte le direzioni.
3. Stabilire se f è differenziabile nell'origine.
4. I punti sugli assi sono estremanti?
5. Cercare e studiare tutti i punti estremanti.*

Soluzione.

1. Scegliendo come traiettoria di avvicinamento all'origine la curva di equazione $x = y^2$, si trova

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t^2, t) = \frac{1}{2}.$$

Si conclude che la funzione f non è continua nell'origine.

2. Le derivate parziali sono chiaramente nulle. Sia $\vec{v} = (\alpha, \beta)$ un vettore con entrambe le coordinate non nulle: allora

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t\alpha, t\beta) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{t\alpha t^2 \beta^2}{t^2 \alpha^2 + t^4 \beta^4} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha \beta^2}{\alpha^2 + t^2 \beta^4} \right) = \frac{\beta^2}{\alpha}. \end{aligned}$$

3. Poiché la funzione f non è continua nell'origine, essa non è nemmeno differenziabile in tale punto.

4. La funzione si annulla sugli assi x e y , mentre negli altri punti ha il segno di x . Di conseguenza, i punti $(x, 0) \in \mathbb{R}^2$ tali che $x > 0$ (risp. $x < 0$) sono di minimo (risp. massimo) locale debole, mentre i punti $(0, y)$ non sono estremanti.
5. Si calcola

$$Jf(x, y) = \left(y^2 \frac{y^4 - x^2}{(x^2 + y^4)^2}, -2xy \frac{y^4 - x^2}{(x^2 + y^4)^2} \right)$$

pertanto $Jf(x, y) = 0$ se e solo se $y = 0, x \neq 0$ oppure $x = \pm y^2, y \neq 0$. I primi li abbiamo studiati, mentre i secondi sono tutti massimi o minimi assoluti deboli a seconda che $x > 0$ o $x < 0$. Infatti basta osservare che $-1/2 \leq f(x, y) \leq 1/2$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e che $f(\pm y^2, y) = \pm 1/2$.

Esercizio 3 Si calcoli

$$\int_D (x^2 + y^2) \cdot e^{(x^2+y^2)^2} dx dy$$

dove il dominio D è definito da

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4; y \leq -|x|\}.$$

Soluzione Facendo uso delle coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos \theta, \\ y = \rho \cdot \sin \theta, \end{cases}$$

il dominio D si trasforma nell'insieme

$$E = \left\{ (\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho \leq 2, \frac{5}{4}\pi \leq \theta \leq \frac{7}{4}\pi \right\}.$$

Essendo il determinante Jacobiano della trasformazione ρ , si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_D (x^2 + y^2) \cdot e^{(x^2+y^2)^2} dx dy &= \int_E \rho^3 e^{\rho^4} d\rho d\theta = \int_{5\pi/4}^{7\pi/4} d\theta \int_0^2 \rho^3 e^{\rho^4} d\rho \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{4} \int_0^{16} e^t dt = \frac{\pi}{8} (e^{16} - 1). \end{aligned}$$

Esercizio 4 La ditta *Gurgle* vorrebbe commercializzare una nuova bibita *diet*. Il proprietario è molto prudente e non vuole rischiare che il prodotto rimanga invenduto e decide di attivare la produzione solo se risultasse evidente che almeno il 75% della popolazione è interessato. Pertanto commissiona un'indagine di mercato dalla quale risulta che, su 2000 intervistati, 1580 si dicono disposti all'acquisto. Conviene iniziare la produzione?

Soluzione. Si consideri il test

$$H_0 : p \leq p_0$$

$$H_0 : p > p_0$$

dove $p_0 := 0.75$. Lo stimatore è $\bar{p} = 1580/2000 = 0.79$ e la quantità pivotale

$$\frac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}} = \frac{0.79 - 0.75}{\sqrt{0.75 \cdot 0.25/2000}} \approx 4.1372.$$

Il P-value

$$\bar{\alpha} = 1 - \Phi(4.1372) \approx 1.8044 \cdot 10^{-5} \approx 0$$

è molto basso, quindi l'ipotesi nulla non è plausibile e di conseguenza conviene mettere in produzione la bibita.

Esercizio 5 La probabilità che esca testa in un lancio di una moneta truccata è $1/3$. Il giocatore vince la partita se su 240 lanci esca testa almeno 100 volte. Supponiamo che il lanci siano indipendenti.

1. Qual è la probabilità di vittoria in una partita?
2. Quante partite sono necessarie in media affinché si osservi una vittoria?
3. Quanto deve valere la probabilità che esca testa affinché il numero medio di partite necessarie per osservare una vittoria sia minore o uguale a 10?*

Soluzione.

1. Sia $\{X_i\}$ una successione iid di variabili di legge $B(1/3)$, allora il numero di teste su 240 lanci è $X = \sum_{i=1}^{240} X_i \sim B(240, 1/3)$. Per il TCL, $X \approx Y \sim \mathcal{N}(80, 160/3)$ da cui $\mathbb{P}(X \geq 100) \approx \mathbb{P}(Y > 99.5) = 1 - \Phi((99.5 - 80)/(4\sqrt{10}/\sqrt{3})) \approx 1 - \Phi(2.67014747) \approx 0.00379090$.

2. Il tempo della prima vittoria T ha legge $geom(0.00379090)$ pertanto il numero medio di partite è $1/0.00379090 \approx 263.79$.

3.

Esercizio 6 Consideriamo la seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} c \log(x), & \text{per } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{per } x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

1. Determinare i valori di $c \in \mathbb{R}$ che rendono f una funzione di densità. Sia X una variabile continua di legge f ; calcolare media e varianza di X .

2. Se $\{X_i\}_{i=1}^{40}$ sono variabili indipendenti e di legge f , calcolare $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{40} X_i \geq 9\right)$.

Sugg.: si provi a calcolare la derivata della funzione $g(x) := x(\log x - 1)$.

Soluzione.

1. Le condizioni necessarie e sufficienti sono

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1 \\ f \geq 0. \end{cases}$$

In questo caso essendo la funzione a segno costante, la prima condizione implica la seconda quindi, integrando per parti,

$$1 = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = c \int_0^1 \log(x) dx = cx(\log(x) - 1)|_0^1 = -c$$

da cui $c = -1$. Inoltre

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx = - \int_0^1 x \log(x) dx = x^2(1/2 - \log(x))/2|_0^1 = 1/4$$

$$E(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x) dx = - \int_0^1 x^2 \log(x) dx = x^3(1/3 - \log(x))/3|_0^1 = 1/9$$

$$\text{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 7/144.$$

2. Utilizzando il TLC

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{40} X_i \geq 9\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{40} X_i - 40/4}{\sqrt{40 \cdot 7/144}} \geq \frac{9 - 40/4}{\sqrt{40 \cdot 7/144}}\right) \\ &\approx 1 - \Phi\left(-\frac{6}{\sqrt{70}}\right) \approx \Phi(0.7171) \approx 0.7634. \end{aligned}$$