Esercizio 1 Si consideri la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{2^n+1}.$$

1. Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza puntuale.
2. Discutere la convergenza uniforme.

Soluzione.

1. Per calcolare il raggio di convergenza usiamo il criterio del rapporto:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}+1}}{\frac{n}{2^n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2^n+1}{2^{n+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

Ne segue che $R = 2$.

Agli estremi dell'intervallo, cioè per $x+2 = -2$ e per $x+2 = 2$, si ottengono rispettivamente le serie numeriche

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (-2)^n}{2^n+1} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^n}{2^n+1},$$

che non convergono.

Si conclude che l'insieme di convergenza puntuale della serie assegnata è

$$\{x \in \mathbb{R} : -2 < x+2 < 2\} = \{x \in \mathbb{R} : -4 < x < 0\}.$$

2. Dalla teoria sappiamo che c'è convergenza uniforme su ogni sottoinsieme dell'intervallo $[-4 + \epsilon, -\epsilon]$ per $\epsilon > 0$. Dal teorema del doppio limite inoltre se su A c'è convergenza uniforme allora 0 e -4 non possono essere punti di accumulazione di A . Quindi c'è convergenza uniforme su A se e solo se $A \subseteq [-4 + \epsilon, -\epsilon]$ per qualche $\epsilon > 0$.

Esercizio 2 Si consideri la funzione

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Stabilire se f è continua nell'origine.
2. Calcolare le derivate direzionali nell'origine in tutte le direzioni.
3. Stabilire se f è differenziabile nell'origine.
4. I punti sugli assi sono estremanti?

Soluzione.

1. Scegliendo come traiettoria di avvicinamento all'origine la curva di equazione $x = y^2$, si trova

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \frac{1}{2}.$$

Si conclude che la funzione f non è continua nell'origine.

2. Le derivate parziali sono chiaramente nulle. Sia $\vec{v} = (\alpha, \beta)$ un vettore con entrambe le coordinate non nulle: allora

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t\alpha, t\beta) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{t\alpha t^2 \beta^2}{t^2 \alpha^2 + t^4 \beta^4} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha \beta^2}{\alpha^2 + t^2 \beta^4} \right) = \frac{\beta^2}{\alpha}.$$

3. Poiché la funzione f non è continua nell'origine, essa non è nemmeno differenziabile in tale punto.
4. La funzione si annulla sugli assi x e y , mentre negli altri punti ha il segno di x . Di conseguenza, i punti $(x, 0) \in \mathbb{R}^2$ tali che $x > 0$ (risp. $x < 0$) sono di minimo (risp. massimo) locale debole, mentre i punti $(0, y)$ non sono estremanti.

Esercizio 3 Si calcoli

$$\int_D (x^2 + y^2) \cdot e^{(x^2+y^2)^2} dx dy$$

dove il dominio D è definito da

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4; y \leq -|x|\}.$$

Soluzione Facendo uso delle coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos \theta, \\ y = \rho \cdot \sin \theta, \end{cases}$$

il dominio D si trasforma nell'insieme

$$E = \left\{ (\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho \leq 2, \frac{5}{4}\pi \leq \theta \leq \frac{7}{4}\pi \right\}.$$

Essendo il determinante Jacobiano della trasformazione ρ , si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_D (x^2 + y^2) \cdot e^{(x^2+y^2)^2} dx dy &= \int_E \rho^3 e^{\rho^4} d\rho d\theta = \\ &= \int_{5\pi/4}^{7\pi/4} d\theta \int_0^2 \rho^3 e^{\rho^4} d\rho = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{4} \int_0^{16} e^t dt = \frac{\pi}{8} (e^{16} - 1). \end{aligned}$$