Matematica II - ING ELT
Appello del $(09)^3 = 09.09.09$

Nome e cognome: ....

Scegliere una delle opzioni sottostanti **Matricola: ....**

☐ **Recupero I parte** ☐ **Recupero II parte** ☐ **Scritto completo**

Esercizio 1 Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot x^n.$$

1. Determinare il raggio di convergenza della serie.
2. Si determinino gli insiemi di convergenza puntuale, assoluta ed uniforme.

Soluzione. Osserviamo che

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 1/n}{1 + 1/(n+1)} = 1.$$

Inoltre $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 1$ quindi non ci può essere convergenza in $x = \pm 1$. Pertanto si ha convergenza puntuale in $(-1, 1)$, convergenza assoluta in $(-1, 1)$ e convergenza uniforme in ogni sottoinsieme di un insieme del tipo $[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$ per qualche $\varepsilon > 0$.

Esercizio 2 Si consideri la seguente funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{\sin(xy^2)}{x^2+y^2} & \text{se } y > 0 \\ 0 & \text{se } y \leq 0. \end{cases}$$

1. Stabilire in quali punti la funzione è continua.
2. Stabilire in quali punti la funzione è derivabile.
3. Stabilire in quali punti la funzione è differenziabile.
4. La funzione è limitata?
   Sugg: può essere utile ricordare che una funzione continua su un compatto è limitata.

Soluzione. La funzione è rapporto di funzioni C^∞ quindi è sicuramente differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$. La funzione 0 è differenziabile con differenziale nullo, la funzione $\frac{\sin(xy^2)}{x^2+y^2}$ è sicuramente differenziabile su $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$ ed il differenziale si calcola facilmente facendo le derivate parziali ed è nullo. Pertanto la funzione data è differenziabile in $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$ con differenziale nullo. Nell'origine possiamo immediatamente vedere che la funzione non è nemmeno derivabile (e quindi non è differenziabile), infatti se prendiamo la direzione $(1,1)$,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t,t)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sin(t^3)}{2t^3} = \frac{1}{2} \neq 0 = \lim_{t\to 0^-} \frac{f(t,t)}{t}.$$

Sul compatto $\{x^2+y^2 \leq 1\}$ la funzione, essendo continua, è anche limitata, sul suo complementare, $\{x^2+y^2 > 1\}$, vale

$$\left|\frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{1}{x^2+y^2} \leq 1,$$

pertanto la funzione f è limitata su $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 3 Sviluppare in serie di Fourier la funzione $f(x)$, periodica di periodo 2π,

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,\pi] \\ 0 & x \in (-\pi, 0). \end{cases}$$

1. C'è convergenza puntuale in $\mathbb{R}$?
2. C'è convergenza uniforme in $\mathbb{R}$?

Soluzione. La funzione non ha particolari simmetrie. Facilmente si calcola

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cos(nx)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\frac{(-1)^n-1}{n^2}, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\sin(nx)\mathrm{d}x = -\frac{(-1)^n}{n}, \end{aligned}$$

da cui

$$f \sim \frac{\pi}{4} - \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\pi}\frac{2}{(2n+1)^2}\cos((2n+1)x) - \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n}\sin(nx).$$

La funzione f è sufficientemente regolare per cui la serie di Fourier converge su tutto $\mathbb{R}$ alla funzione periodica di periodo 2π definita in $x \in (0, 2\pi]$ da

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \begin{cases} f(x), & x \in (0, 2\pi), \\ \pi/2 & x = 2\pi. \end{cases}$$

Non essendo continua la funzione limite, il teorema del doppio limite implica che la convergenza non può essere uniforme su $\mathbb{R}$.

Esercizio 4 Si consideri l'insieme $A = \{x^2 + y^2 - xy \leq 1\}$ e la funzione $f(x, y) = x^2 - y^2$. Trovare massimi e minimi di f su A.

Soluzione. A è compatto ed f è continua quindi esistono massimi e minimi assoluti di f su A. Nell'aperto $Jf(x, y) = (2x, -2y)$, per cui l'unico punto stazionario è $(0, 0)$, tuttavia è banale vedere (tramite gli avvicinamenti sugli assi oppure tramite lo studio della matrice hessiana) che non è un estremante. Gli estremanti devono quindi essere su $\partial A = \{x^2 + y^2 - xy = 1\}$. Utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, risolviamo quindi il sistema

$$\begin{cases} 2x + \lambda(2x - y) = 0 \\ -2y + \lambda(2y - x) = 0 \\ x^2 + y^2 - xy = 1. \end{cases}$$

Notiamo subito che se (x, y) risolve il sistema allora anche $(-x, -y)$ lo risolve. Se il sistema

$$\begin{pmatrix} 2 + 2\lambda & -\lambda \\ -\lambda & 2\lambda - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ha una sola soluzione, questa deve essere $(0, 0) \notin \partial A$, per cui deve essere

$$0 = \det \begin{pmatrix} 2 + 2\lambda & -\lambda \\ -\lambda & 2\lambda - 2 \end{pmatrix} = 3\lambda^2 - 4 = 0$$

da cui $\lambda = \pm 2/\sqrt{3}$. Quindi $y = (2 \pm \sqrt{3})x$ da cui, sostituendo nella terza equazione, si ottengono due coppie di soluzioni per x

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{6 + 3\sqrt{3}}} \qquad x = \pm \frac{1}{\sqrt{6 - 3\sqrt{3}}}.$$

Ricordando l'osservazione precedente si hanno immediatamente le due coppie di soluzioni per (x, y)

$$(x, y) = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{6+3\sqrt{3}}}, \frac{1}{\sqrt{6-3\sqrt{3}}}\right) \qquad (x, y) = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{6-3\sqrt{3}}}, \frac{1}{\sqrt{6+3\sqrt{3}}}\right).$$

Chiaramente si ha

$$0 > f\left(\pm\left(\frac{1}{\sqrt{6+3\sqrt{3}}}, \frac{1}{\sqrt{6-3\sqrt{3}}}\right)\right) = -f\left(\pm\left(\frac{1}{\sqrt{6-3\sqrt{3}}}, \frac{1}{\sqrt{6+3\sqrt{3}}}\right)\right) > 0$$

da cui $\pm(\frac{1}{\sqrt{6+3\sqrt{3}}}, \frac{1}{\sqrt{6-3\sqrt{3}}})$ sono minimi assoluti forti mentre $\pm(\frac{1}{\sqrt{6-3\sqrt{3}}}, \frac{1}{\sqrt{6+3\sqrt{3}}})$ sono massimi assoluti forti.

Esercizio 5
Calcolare il seguente integrale multiplo

$$\int_A y \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

dove $A = \{(x, y) : y \geq \sqrt{\log(|x|)}, y \geq 0, y \leq 1\}$.

Soluzione. Teniamo conto della simmetria del dominio rispetto all'asse y (e che $\sqrt{\log(|x|)}$ non è definito se $|x| \leq 1$) ed integriamo prima rispetto a x e poi rispetto a y ottenendo

$$\begin{aligned}\int_A f \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= 2\int_0^1 \mathrm{d}y \int_1^{e^{y^2}} y \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 2y(e^{y^2} - 1)\mathrm{d}y = (e^{y^2} - 2y)|_0^1 = e - 2.\end{aligned}$$

Lo stesso risultato si sarebbe ottenuto integrando prima rispetto ad y e poi ad x.

Se il dominio fosse stato $A = \{(x, y) : y^2 \geq \log(|x|), y \geq 0, y \leq 1\}$ avremmo ottenuto

$$\begin{aligned}\int_A f \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{-e^{y^2}}^{e^{y^2}} y \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 2ye^{y^2}\mathrm{d}y = e^{y^2}|_0^1 = e - 1.\end{aligned}$$

Esercizio 6 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 9y = \cos 3x + \cos x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Soluzione. Cerchiamo prima la soluzione generale dell'omogenea $y'' + 9y = 0$ risolvendo $\lambda^2 + 9\lambda = 0$ da cui la soluzione generale è $y(x) = A\cos(3x) + B\sin(3x)$.

Cerchiamo ora la soluzione con la sola forzante $\cos(3x)$: sarà del tipo $y(x) = ax\cos(3x) + bx\sin(3x)$. Sostituendo nell'equazione si ottiene facilmente $a = 0$ e $b = 1/6$.

Cerchiamo quindi la soluzione con la sola forzante $\cos(x)$. Cerchiamola del tipo $a\cos(x)$; sostituendo si trova $a = 1/8$. Pertanto la soluzione genrale sarà

$$y(x) = A\cos(3x) + (B + x/6)\sin(3x) + \cos(x)/8.$$

Sostituendo i dati iniziali si trova infine $A = 1/8$ e $B = 0$, la soluzione cercata è quindi

$$y(x) = \cos(x)/8 + x\sin(3x)/6 - \cos(3x)/8.$$