**Analisi II**
**Docente: Dott. F. Zucca**

**II prova in Itinere - 30 giugno 2009**

**Nome e cognome:** .......................... **Matricola:** .............
(riportare nome, cognome e matricola in ogni foglio)

Scegliere una delle opzioni sottostanti ................................................

☐ **Recupero II parte** — **esercizi 1,2,3**

☐ **Scritto completo** — **esercizi 1,2,4,5**

**Esercizio 1** Calcolare gli estremi della funzione $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 4$ nell'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + y^2 \leq 1\}$.

1. Determinare la natura di tali estremi.
2. Dare le definizioni di punto stazionario e di punto estremo; descrivere il legame tra le due nozioni.

**Soluzione**.

1. La funzione è continua e $A$ è compatto, per cui ammette massimo e minimo assoluto. Nell'aperto $\mathring{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + y^2 < 1\}$ i punti stazionari sono soluzione di

$$(0,0) = Jf(x,y) = (2x, 4y)$$

cioè $(x,y) = (0,0)$ che è un punto di minimo assoluto forte, poiché $f \geq 4 = f(0,0)$. Non essendoci altri punti stazionari nell'aperto, allora il punto di massimo assoluto deve essere sul bordo $\partial A = \{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2+y^2 = 1\}$. Qui ricorriamo al metodo di Lagrange con $g(x,y) = 3x^2 + y^2 - 1$

$$\begin{cases} 2x - 6\lambda x = 0 \\ 4y - 2\lambda y = 0 \\ 3x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $\lambda = 1/3$, $y = 0$, $x = \pm 1/\sqrt{3}$ e $\lambda = 2$, $x = 0$, $x = \pm 1$. Ora $f(\pm 1/\sqrt{3}, 0) = 2/3 + 4 < 6 = f(0, \pm 1)$, da cui $(0, \pm 1)$

sono massimi assoluti forti. Chiaramente anche $\partial A$ è compatto, per cui $(\pm 1/\sqrt{3}, 0)$ sono minimi relativamente al bordo, resta da vedere se sono minimi locali anche per $A$. È facile vedere che lungo la curva $y = 0$ tali punti appaiono come massimi, per cui non sono estremi.

2.

**Nome e cognome:** .......................... **Matricola:** .............

**Esercizio 2** Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$\frac{d^2}{dx^2} y\,(x) = 2\,y\,(x) + x + \mathrm{e}^x$$

Esiste una soluzione per cui $\lim_{x\to+\infty} y(x)/exp(x)$ esiste finito? In caso affermativo identificarla e calcolare il limite.
Cosa si intende per prolungamento di una soluzione?

**Soluzione**. La soluzione generale dell'omogenea è

$$y\,(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{2}x} c_1 + \mathrm{e}^{-\sqrt{2}x} c_2.$$

Cerchiamo separatamente due soluzioni particolari con le due forzanti $x$ e $\exp(x)$; facilmente si trovano $y = x/2$ e $y = -exp(x)$. Pertanto la soluzione generale è

$$y\,(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{2}x} c_1 + \mathrm{e}^{-\sqrt{2}x} c_2 - x/2 - \mathrm{e}^x$$

definita su tutto $\mathbb{R}$. Ora

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} y(x)/exp(x) &= \lim_{x\to\infty} \left(\mathrm{e}^{(\sqrt{2}-1)x} c_1 + \mathrm{e}^{-(\sqrt{2}+1)x} c_2 - x\exp(x)/2 - 1\right) \\ &= \begin{cases} +\infty & c_1 > 0 \\ -\infty & c_1 > 0 \\ -1 & c_1 = 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Quindi il limite esiste se e solo se $c_1 = 0$ (per qualsiasi valore di $c_2$ e vale sempre $-1$.

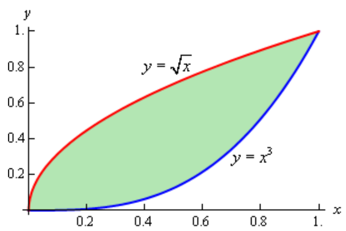
**Nome e cognome:** .......................... **Matricola:** .............

**Esercizio 3** Dopo aver tracciato un grafico approssimativo del dominio $A$ di integrazione, si calcoli il valore numerico dell'integrale

$$\int_A (4xy - y^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

dove $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 \leq y \leq \sqrt{x}\}$.
Determinare una condizione sufficiente per l'integrabilità di una funzione su un insieme chiuso e limitato.

**Soluzione**. Il dominio di integrazione è rappresentato in figura.




Chiaramente $x^3 \leq \sqrt{(x)}$ se e solo se $x \in [0, 1]$, da cui

$$\begin{aligned}\int_A (4xy - y^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} (4xy - y^3)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 [2xy^2 - y^4/4]\Big|_{x^3}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 (2x^2 - 2x^7 - x^2/4 + x^{12}/4)\mathrm{d}x \\ &= [7x^3/12 - x^8/4 + x^{13}/52]\Big|_0^1 = 55/156.\end{aligned}$$

**Nome e cognome:** .......................... **Matricola:** .............

**Esercizio 4** Si consideri la seguente funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 - xy^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ c \end{cases}$$

dove $c \in \mathbb{R}$.

1. Esistono valori di $c \in \mathbb{R}$ tali che la funzione è continua in tutto $\mathbb{R}^2$? In caso affermativo determinarli.

2. Calcolare le derivate direzionali per i valori di $c$ determinati al punto precedente.

3. Esistono valori di $c \in \mathbb{R}$ tali che la funzione è differenziabile in $(0,0)$? In caso affermativo determinarli.

4. Scrivere la definizione di funzione derivabile in un punto.

**Soluzione**. Lungo gli assi la funzione è nulla, pertanto l'unico valore possibile per rendere continua la funzione nell'origine è $c = 0$. Chiaramente $\partial_x f(0,0) = \partial_y f(0,0) = 0$; verifichiamo la differenziabilità in $(0,0)$

$$\left| \frac{x^4 - xy^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right| \leq |x| \left| \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right| + |x| \left| \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right| \leq 2|x| \to 0$$

se $(x,y) \to (0,0)$. Quindi la funzione è differenziabile e quindi continua nell'origine se $c = 0$. Chiaramente $Jf(0,0) = (0,0)$ e quindi $D_v f(0,0) = 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^2$.

**Nome e cognome:** ......................... **Matricola:** .............

**Esercizio 5** Sia data la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{n}} x^n.$$

1. Calcolare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza puntuale. $\big($Si noti che $n^2 e^{-\sqrt{n}}$ tende a 0 se $n \to +\infty$, pertanto esiste $M > 0$ tale che $n^2 e^{-\sqrt{n}} \le M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.$\big)$
2. Dire cosa si intende per convergenza assoluta.
3. Determinare l'insieme di convergenza uniforme e quello di convergenza assoluta.
4. Mostrare che $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{n}} \ge e/(e-1)$.

**Soluzione**. Il raggio di convergenza

$$R = 1/\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{e^{-\sqrt{n}}} = 1/\limsup_{n\to+\infty} e^{-1/\sqrt{n}} = 1.$$

D'altro canto, $e^{-\sqrt{n}} \le M/n^2$, pertanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{n}} \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{n^2} < +\infty$$

per cui la serie a termini positivi converge assolutamente in $x = 1$ da cui si ha convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale in $[-1, 1]$.

Infine $e^{-\sqrt{n}} \ge e^{-n}$ pertanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{n}} \ge \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} = \frac{1}{1 - 1/e} = \frac{e}{e-1}$$