Matematica II - ING ELT
Appello del 27/7/2009

Nome e cognome: ....

Scegliere una delle opzioni sottostanti **Matricola: ....**

☐ **Recupero I parte** ☐ **Recupero II parte** ☐ **Scritto completo**

Esercizio 1 Si consideri la seguente funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x \log y}{x^2+y^2} & \text{se } y > 0 \\ 0 & \text{se } y \leq 0. \end{cases}$$

1. Stabilire in quali punti la funzione è continua.
2. Stabilire in quali punti la funzione è differenziabile.
3. Quanto vale la matrice Jacobiana nei punti (x, y) con $y < 0$?
4. È facile mostrare che esiste almeno un massimo locale in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0, x > 0\}$. Supponendo questo fatto come noto, determinare tutti i punti estremanti di f in $\mathbb{R}^2$.
5. La funzione è limitata?

Soluzione.

1. Come composizione di funzioni C^∞ la funzione è $C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : y = 0\})$. Inoltre $f(x, y) = -f(-x, y)$.

   Consideriamo un punto generico del tipo $(x_0, 0)$.

   Se $x_0 \neq 0$ allora $\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x, y) = -\text{sgn}(x_0) \cdot \infty$ per cui la funzione non è continua (e nemmeno limitata).

   Se $x_0 = 0$ allora, definitivamente se $(x, y) \to (0, 0)$,

   $$|f(x, y)| \geq \left| \frac{1}{x^2 + y^2} \right| |\log y| \to +\infty,$$

   per cui non è continua nemmeno nell'origine.

2. La funzione non è differenziabile in $(x_0, 0)$ per nessun $x_0 \in \mathbb{R}$ poiché non è nemmeno continua.

3. Essendo la funzione nulla in un intorno opportuno del punto, si ha che $Jf(x, y)$ è la matice nulla.

4. Si osservi che $\operatorname{sgn}(f(x, y)) = \operatorname{sgn}(x(y-1))$ per ogni (x, y) tale che $y > 0$. Quindi i punti del tipo $(x_0, 0)$ sono massimi (risp. minimi) locali deboli se $x_0 > 0$ (risp. $x_0 < 0$). L'origine non è estremante. Inoltre nessun punto del tipo $(0, y_0)$ con $y_0 \geq 0$ può essere estremante.

   Invece tutti i punti (x, y) con $y < 0$ sono massimi e minimi locali deboli.

   Calcoliamo la matrice Jacobiana nei punti (x, y) con $y > 0$.

$$Jf(x, y) = \left(\tfrac{(y^2-x^2)\log y}{(x^2+y^2)^2}, x\tfrac{(x^2+y^2)/y-2y\log y}{(x^2+y^2)^2}. \right)$$

   I punti stazionari sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} Jf(x, y) = 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

   cioè

$$\begin{cases} y = \pm x \\ 2y(1 - \log y) = 0. \end{cases}$$

   I punti da discutere sono $(\pm e, e)$; nell'ipotesi che esista un massimo locale allora (e, e) è un massimo (forte). Per parità $(-e, e)$ è un minimo (forte).

   Per dimostrare l'esistenza degli estremi si potrebbe procedere come segue. Per ogni $(x, y) \in \mathbb{R} \times [1, +\infty)$, si ha che $f(x, y) \geq 0$. Inoltre

$$|f(x, y)| \leq \left| \frac{x}{x^2 + y^2} \log y \right| \leq \left| \frac{\log \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \to 0$$

   se $(x, y) \to \infty$; pertanto $\lim_{(x,y)\to\partial(\mathbb{R}\times[1,+\infty)),(x,y)\in\mathbb{R}\times[1,+\infty)} f(x, y) = 0$. Da cui esistono almeno un massimo ed un minimo assoluti (il primo strettamente positivo ed il secondo strettamente negativo) in $\mathbb{R} \times (1, +\infty)$.

Esercizio 2 Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cdot \log\left(\frac{n+3}{n+2}\right) \cdot x^n ,$$

dove a un parametro reale positivo.

(*i*) Determinare a in modo che il raggio di convergenza della serie sia uguale a 3;

(*ii*) per il valore di a trovato al punto precedente, si studi il comportamento della serie agli estremi dell'intervallo di convergenza e si determinino gli insiemi di convergenza assoluta ed uniforme.

Soluzione. Si tenga presente la seguente stima

$$\log\left(\frac{n+3}{n+2}\right) = \log\left(1+\frac{1}{n+2}\right) \sim \frac{1}{n+2}. \tag{1}$$

Utilizzando l'equazione (1) si ha

$$\begin{aligned} 3 = R &= 1/\limsup_n \sqrt[n]{|a^n \log((n+3)/(n+2))|} \\ &= 1/\limsup |a| \sqrt[n]{1/(n+2)} = 1/a \end{aligned}$$

da cui $a = 1/3$. Si ha quindi la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n \cdot \log\left(\frac{n+3}{n+2}\right).$$

Se $x = 3$, essendo il termine generale asintotico a $1/(n+2)$ (dall'equazione (1)), la serie diverge. Se $x = -3$ dal criterio di Leibniz, essendo $\log((n+3)/(n+2))$ decrescente, la serie converge. Si ha quindi convergenza puntuale in $[-3, 3)$, convergenza assoluta in $(-3, 3)$, convergenza uniforme in ogni sottoinsieme di un intervallo del tipo $[-3, 3-\epsilon]$ (con $\epsilon > 0$) e convergenza totale in ogni sottoinsieme di un intervallo del tipo $[-3+\epsilon, 3-\epsilon]$ (con $\epsilon > 0$).

Esercizio 3 Sviluppare in serie di Fourier la funzione $f(x)$, periodica di periodo 2π, pari e tale che

$$f(x) = x(\pi - x) \quad \forall x \in [0, \pi]\,.$$

Discutere il tipo di convergenza.

Soluzione. La funzione è pari pertanto $b_n = 0$ per ogni n, mentre

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi - x)\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{3} \\ a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi - x)\cos(nx)\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x(\pi - x)\sin(nx)}{n} + \pi\frac{\cos(nx)}{n^2} - 2\frac{x\cos(nx)}{n^2} + 2\frac{\sin(nx)}{n^3}\right]\Big|_0^\pi \end{aligned}$$

dove nella seconda equazione $n \geq 1$, da cui $a_n = 2((-1)^{n+1}-1)/n^2$. Pertanto la serie associata è

$$f \sim \frac{\pi^2}{6} - 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}.$$

Per la regolarità della funzione f si ha che la serie di Fourier converge puntualmente ad f stessa e dal criterio di Weierstrass per le serie si ha che la convergenza è anche uniforme in tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 4 Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F} \;=\; \frac{2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\mathbf{i} + \frac{2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\mathbf{j}$$

1. Verificare che è irrotazionale.
2. Specificare un dominio dove $\mathbf{F}$ ammette un potenziale e calcolarlo.
3. Calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la curva $\gamma_1 : \ (1, 1+t^2)\ t \in [0,1]$
4. Si considerino le curve *chiuse*, per $t \in [0, 2\pi]$

   $$\gamma_2 : \ (\cos t, \sin t) \qquad\qquad \text{e} \qquad\qquad \gamma_3 : \ (3+\cos t, \sin t)$$

   Si può affermare dal solo fatto che $\mathbf{F}$ è irrotazionale in tutto $\mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$ che il lavoro lungo γ_2 sia nullo? E lungo γ_3? Motivare le risposte.

Soluzione.

1. Poiché $F_1(a,b) = F_2(b,a)$ allora $\partial_y F_1(a,b) = \partial_x F_2(b,a)$ pertanto basta verificare che $\partial_y F_1(a,b) = \partial_y F_1(b,a)$ infatti

   $$\partial_y F_1(a,b) = -\frac{8ab}{(a^2+b^2)^3}.$$

2. $U(x,y) \;=\; \int \frac{2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}dx \;=\; \left(t = x^2\right) \;=\; \int \frac{dt}{\left(t+y^2\right)^2} \;=\; -\frac{1}{x^2+y^2} \;+$ $H(y)$. Usiamo la condizione $\frac{\partial U}{\partial y} = F_2$. $-\frac{2y}{x^2+y^2} + H'(y) = -\frac{2y}{x^2+y^2}$ e quindi $H(y) = c = 0$ per arbitrarietà della costante.

   $$U(x,y) = -\frac{1}{x^2+y^2}$$

   Quindi, avendo calcolato un potenziale su $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$, la forma è esatta.

3. gli estremi della curva sono $(1,1)$ e $(1,2)$ per cui $L = U(1,2) - U(1,1) = -\frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$

4. La risposta per γ_2 è no, perché $\mathbf{F}$ è sicuramente conservativo in ogni dominio semplicemente connesso, ma $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ non è semplicemente connesso (la curva γ_2 è la circonferenza unitaria che circonda il punto singolare (origine)). Tuttavia il lavoro è nullo perché, in virtù del punto (2), la forma è esatta. Per quanto riguarda la curva γ_3 invece la risposta è positiva in quanto può essere immersa in un sottoinsieme semplicemente connesso (ad esempio $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$).

Esercizio 5 Si consideri l'insieme $A = \{x^2 + y^2/2 + xy \leq 1\}$ e la funzione $f(x,y) = x - y$. Trovare massimi e minimi di f su A.

Soluzione. A è compatto ed f è continua quindi esistono massimi e minimi assoluti di f su A. Nell'aperto $Jf(x,y) = (1,-1)$, per cui non ci sono estremanti. Gli estremanti devono quindi essere su $\partial A = \{x^2 + y^2/2 + xy = 1\}$. Utilizziamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, risolviamo quindi il sistema

$$\begin{cases} 1 + \lambda(2x + y) = 0 \\ -1 + \lambda(y + x) = 0 \\ x^2 + y^2/2 + xy = 1 \end{cases}$$

da cui, essendo $\lambda \neq 0$ (altrimenti non ci sono soluzioni) si ha $x = -2/\lambda$, $y = 3/\lambda$. Sostituendo nell'ultima equazione si ottiene $\lambda = \pm\sqrt{5/2}$ da cui $(x,y) = \pm(2\sqrt{2/5}, -3\sqrt{2/5})$. Naturalmente $f(2\sqrt{2/5}, -3\sqrt{2/5}) > 0 > -f(2\sqrt{2/5}, -3\sqrt{2/5}) = f(-2\sqrt{2/5}, 3\sqrt{2/5})$, da cui $(2\sqrt{2/5}, -3\sqrt{2/5})$ è un massimo assoluto forte, mentre $(-2\sqrt{2/5}, 3\sqrt{2/5})$ è un minimo assoluto forte e non vi sono altri punti estremi.

Esercizio 6
Si consideri il seguente problema di Cauchy dipendente dal parametro $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y' = y \log x \\ y(1) = \alpha. \end{cases}$$

1. Trovare la soluzione al variare di α.

2. Per quali valori di α esistono soluzioni limitate?

Soluzione.

1. Sia $\Omega := (0, +\infty) \times \mathbb{R}$; si ha esistenza ed unicità della soluzione per ogni dato iniziale $(x_0, y_0) \in \Omega$, pertanto si ha esistenza ed unicità della soluzione massimale in Ω.

   Se $\alpha = 0$ l'unica soluzione è evidentemente $y(x) \equiv 0$.

   Sia quindi $\alpha \neq 0$. Allora in un intorno del dato iniziale la soluzione coincide con la soluzione di

   $$\begin{cases} \frac{y'}{y} = \log x \\ y(1) = \alpha \end{cases}$$

   che è
   $$\begin{cases} y(x) = ke^{x(\log x - 1)} \\ y(1) = \alpha \end{cases}$$

   da cui $y(x) = \alpha e^{x(\log x - 1)+1}$ che è ben definita su tutto $(0, +\infty)$ per cui è massimale.

2. Poiché $e^{x(\log x-1)+1}$ è illimitato, si ha che l'unica soluzione limitata è per $\alpha = 0$.