129572749278

Analisi II
Docente: Dott. F. Zucca

I prova in Itinere - 8 maggio 2009

Nome e cognome: .... **Matricola:** ....

Esercizio 1 Si consideri la seguente serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}\,.$$

1. Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza puntuale.
2. Discutere la convergenza uniforme.
3. Enunciare il criterio di Weierstrass per la convergenza uniforme (e totale) di una serie di funzioni.
4. *Calcolare esplicitamente la somma della serie.
(Sugg: si utilizzi la formula di integrazione per serie di potenze).

Soluzione.

1.
$$R = \frac{1}{\lim_n \sqrt[n]{1/(n2^n)}} = \lim_n \sqrt[n]{n2^n} = 2\lim_n \sqrt[n]{n} = 2.$$

Ai bordi: se $x = 2$ si ha la serie numerica

$$\sum_n \frac{1}{n}$$

che diverge a $+\infty$ essendo a termini positivi e gli addendi sono asintotici a $1/n$ se $n \to +\infty$; Se $x = -2$ si ha la serie numerica

$$\sum_n (-1)^n \frac{1}{n}$$

che converge per il criterio di Leibnitz. Quindi l'insieme di convergenza puntuale è $[-2, 2)$.

2. Si ha convergenza uniforme in A se e solo se $A \subseteq [-2, 2-\epsilon]$ per qualche $\epsilon > 0$.

3.

4. Chiaramente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$ è la primitiva F di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{2^n} = 1/(2-x)$ tale che $F(0) = 0$. Ora la primitiva generica di f è $-\log|2-x| + c$. Imponendo la condizione $F(0) = 0$ si ha
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n} = \log(1/|1 - x/2|).$$

Esercizio 2 Si consideri la funzione
$$f(x) := \begin{cases} x^2 & x \in [0, \pi] \\ -x^2 & x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

1. Calcolare la serie di Fourier associata ad f.
2. Discutere la convergenza puntuale della serie.
3. Enunciare una condizione sufficiente per la convergenza uniforme su $\mathbb{R}$ di una successione di Fourier.
4. La serie converge uniformemente sull'insieme di convergenza puntuale?

Soluzione. La funzione è dispari, limitata, appartiene alla classe $P_{2\pi}$ e le condizioni D sono soddisfatte in tutto $\mathbb{R}$; pertanto la serie associata convergerà puntualmente su $\mathbb{R}$ (ma non uniformemente su $\mathbb{R}$, visto che la funzione non è continua) alla funzione
$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \begin{cases} x^2 & x \in [0, \pi) \\ -x^2 & x \in (-\pi, 0) \\ 0 & x = \pi \end{cases}$$
prolungata per periodicità su $\mathbb{R}$ con periodo 2π.

La funzione è dispari pertanto $a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Mentre, integrando per parti, si ottiene
$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\sin(nx)\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{-n^2x^2\cos(nx) + 2\cos(nx) + 2nx\sin(nx)}{n^3}\Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{4}{n^3\pi}((-1)^n - 1) + (-1)^{n+1}\frac{2}{n}\pi \end{aligned}$$

da cui

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^3\pi}((-1)^n - 1) + (-1)^{n+1}\frac{2}{n}\pi \right) \sin(nx).$$

Esercizio 3 Si consideri la seguente funzione

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2\sin(y)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Stabilire dove la funzione è continua.
2. La funzione è derivabile in $(0,0)$?
3. Scrivere la definizione di funzione differenziabile in un punto.
4. La funzione è differenziabile in $(0,0)$?

Soluzione.

1. La funzione è di classe $C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ (anzi, è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$). Chiaramente, se $(x,y) \to 0$ allora
$$\frac{x^2\sin(y)}{x^2+y^2} \sim \frac{x^2y}{x^2+y^2}$$
quindi la funzione è continua anche nell'origine. Un'altro modo per vederlo è notare che
$$\left| \frac{x^2\sin(y)}{x^2+y^2} \right| \leq |\sin(y)| \to 0$$
se $(x,y) \to 0$.

2. Per la derivabilità, notiamo che se $v = (a,b) \neq (0,0)$
$$\frac{(ta)^2\sin(tb)}{t((ta)^2+(tb)^2)} = \frac{a^2}{a^2+b^2}\frac{\sin(tb)}{t} \to \frac{a^2b}{a^2+b^2}$$
se $t \to 0$ e non è lineare in (a,b). La funzione è quindi derivabile lungo le rette, ma non è derivabile ($\partial_x f(0,0) = \partial_y f(0,0) = 0$).

3.

4. Non essendo derivabile nell'origine, la funzione non è nemmeno differenziabile.