1. Determinare i punti di massimo e minimo assoluti della funzione

$$f\left(x,y\right)=xe^{y}-ye^{x}$$

in

$$D=\left\{(x,y):x\geq 0,y\geq 0,x+y\leq 2\right\}.$$

Soluzione: D è il triangolo di vertici $O=(0,0)$, $A=(2,0)$ e $B=(0,2)$, quindi è un insieme chiuso e limitato di R^2; inoltre, f è continua in D, allora per il teorema di Weierstrass esistono punti di massimo e di minimo assoluti di f in D: essi potranno stare nella parte interna o sulla frontiera di D.

Cerchiamo i punti stazionari interni ($f\in C^1(D)$): il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=e^{y}-ye^{x}=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=xe^{y}-e^{x}=0 \end{cases}$$

ha come unica soluzione il punto $(1,1)$, che non appartiene alla parte interna di D.

Studiamo la funzione f su ∂D:

- sul lato OA, $f(x,0)=x$ non ha punti stazionari per $0<x<2$;
- sul lato OB, $f(0,y)=-y$ non ha punti stazionari per $0<y<2$;
- sul lato AB, la funzione $f(x,2-x)=xe^{2-x}-(2-x)e^{x}$, $0<x<2$, ha un punto stazionario in $x=1$;

quindi $(1,1)$ è il solo punto stazionario vincolato di f in ∂D.

Infine restano da considerare i vertici del triangolo.

Il massimo di f in D è 2, assunto in A, e il minimo è -2, assunto in B.

2. Determinare i punti di estremo assoluto della funzione

$$f\left(x,y\right)=x^{2}-2x+y^{2}$$

nell'insieme

$$D=\left\{(x,y):\frac{x^{2}}{4}+y^{2}=1\right\}.$$

Soluzione: Il teorema di Weierstrass ci assicura l'esistenza di punti di massimo e di minimo assoluti di f in D. Possiamo rintracciarli in due modi differenti:

I metodo Parametrizziamo l'ellisse D:

$$\begin{cases} x=2\cos\vartheta \\ y=\sin\vartheta \end{cases} \qquad 0\leq\vartheta\leq 2\pi$$

e cerchiamo i punti stazionari della funzione in una variabile

$$\phi\left(\vartheta\right)=4\cos^{2}\vartheta-4\cos\vartheta+\sin^{2}\vartheta$$

nell'intervallo $[0, 2\pi]$. La derivata prima

$$\phi'(\vartheta) = 2\sin\vartheta\,(-3\cos\vartheta + 2)$$

si annulla per $\vartheta = \pm\pi$ e per $\vartheta = \pm\arccos\left(\frac{2}{3}\right)$. I corrispondenti punti stazionari vincolati sono $(2, 0)$, $(-2, 0)$, $(\frac{4}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3})$ e $(\frac{4}{3}, -\frac{\sqrt{5}}{3})$. Calcolando e confrontando il valore della funzione f in questi quattro punti, otteniamo che il massimo di f in D è 8, assunto nel punto $(-2, 0)$, mentre il minimo è $-\frac{1}{3}$, assunto nei punti $(\frac{4}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3})$ e $(\frac{4}{3}, -\frac{\sqrt{5}}{3})$.

II metodo Possiamo in alternativa utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, dato che il vincolo D è della forma

$$D = \{(x, y) : F(x, y) = 0\},$$

dove $F(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2 - 1$, f e F sono di classe C^1 e $\nabla F(x, y) \neq 0\ \forall (x, y) \in D$. Allora i punti di massimo e di minimo vincolati di f in D sono punti stazionari (liberi) della funzione

$$H(x, y, \lambda) = x^2 - 2x + y^2 + \lambda\left(\frac{x^2}{4} + y^2 - 1\right).$$