Scelta di un integrale particolare di un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti

Paolo Sanchini

13 marzo 2008

Sia

$$\alpha_0 y + \alpha_1 y' + \alpha_2 y'' + \cdots + \alpha_n y^{(n)} = \beta(x) \tag{1}$$

un'equazione differenziale lineare di ordine n a coefficienti costanti, dove l'incognita y è una funzione della variabile x, e siano

$$\alpha_0 y + \alpha_1 y' + \alpha_2 y'' + \cdots + \alpha_n y^{(n)} = 0 \tag{2}$$

l'equazione omogenea associata e

$$\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \cdots + \alpha_n t^n \tag{3}$$

il corrispondente polinomio caratteristico.

Nel seguito mostreremo come scegliere un integrale particolare della (1) a seconda del termine forzante $\beta(x)$ in alcuni casi comuni.

Forzante polinomiale

In questo caso $\beta(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_p x^p$: si cercherà allora una soluzione particolare della (1) di tipo polinomiale, cioè

$$\boxed{k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots + k_q x^q}$$

dove $q = p + r$, essendo r il *minimo* ordine di derivazione nella (2).

Le costanti $k_0, k_1, \ldots, k_q$ sono da determinare.

Forzante esponenziale

Se $\beta(x) = c \cdot e^{\lambda x}$, si sceglie come integrale particolare una funzione del tipo

$$\boxed{k \cdot x^m e^{\lambda x}}$$

dove m è la molteplicità di λ come radice del polinomio caratteristico: la costante da determinarsi è k.

In particolare, se λ *non* è radice di (3), si ha $m = 0$, per cui la soluzione particolare diviene

$$\boxed{k \cdot e^{\lambda x}}$$

Forzante circolare

In tal caso
$$\beta(x) = c_1 \sin(\lambda x) + c_2 \cos(\lambda x)\,.$$
Si cerca un integrale particolare della forma
$$\boxed{x^m \big[k_1 \sin(\lambda x) + k_2 \cos(\lambda x)\big]}$$
dove m è la molteplicità di $\pm i\lambda$ come radice del polinomio caratteristico: le costanti non note sono k_1 e k_2.

Se $\pm i\lambda$ *non* annulla (3), si avrà $m = 0$, per cui la precedente funzione si riduce a
$$\boxed{k_1 \sin(\lambda x) + k_2 \cos(\lambda x)}$$

Prodotto di un polinomio per un esponenziale

Se $\beta(x) = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_p x^p) \cdot e^{\lambda x}$, si sceglie come soluzione particolare dell'equazione una funzione del tipo
$$\boxed{x^m \cdot (k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots + k_q x^q) \cdot e^{\lambda x}}$$
dove m è la molteplicità di λ come radice del polinomio caratteristico e $q = p + m$: le costanti da determinarsi sono $k_0, k_1, \ldots, k_q$.

In particolare, quando λ *non* è radice di (3), si ha $m = 0$, per cui l'integrale particolare sarà
$$\boxed{(k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots + k_p x^p) \cdot e^{\lambda x}}$$

Prodotto di un esponenziale per una funzione circolare

In questo caso
$$\beta(x) = e^{\lambda x} \big[c_1 \sin(\mu x) + c_2 \cos(\mu x)\big]\,,$$
e si sceglie un integrale particolare della forma
$$\boxed{x^m e^{\lambda x} \big[k_1 \sin(\mu x) + k_2 \cos(\mu x)\big]}$$
dove m è la molteplicità di $\lambda \pm i\mu$ come radice del polinomio caratteristico: le costanti non note sono k_1 e k_2.

Qualora $\lambda \pm i\mu$ *non* annulli (3), si ha $m = 0$, per cui la precedente funzione diviene
$$\boxed{e^{\lambda x} \big[k_1 \sin(\mu x) + k_2 \cos(\mu x)\big]}$$

Forzante iperbolica

In tal caso

$$\beta(x) = c_1 \sinh(\lambda x) + c_2 \cosh(\lambda x)\,.$$

Si cerca un integrale particolare della forma

$$\boxed{x^m \big[k_1 \sinh(\lambda x) + k_2 \cosh(\lambda x)\big]}$$

dove m è la molteplicità di $\pm\lambda$ come radice del polinomio caratteristico: le costanti da determinarsi sono k_1 e k_2.

Se $\pm\lambda$ *non* annulla (3), si avrà $m = 0$, quindi la precedente funzione si riduce a

$$\boxed{k_1 \sinh(\lambda x) + k_2 \cosh(\lambda x)}$$