1. Trovare l'integrale generale di $y' = 2xy^2$ e risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2xy^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Soluzione: L'integrale generale è l'unione delle funzioni:

- $y(x) = 0 \ \forall x \in R$;
- $y(x) = -\frac{1}{x^2+c} \ \forall x \in R$, per $c > 0$;
- le due funzioni di legge $y(x) = -\frac{1}{x^2}$ definite una su $(-\infty, 0)$ e l'altra su $(0, +\infty)$ $(c = 0)$;
- le tre famiglie di funzioni di legge $y(x) = -\frac{1}{x^2+c}$ definite rispettivamente in $(-\infty, -\sqrt{-c})$, $(-\sqrt{-c}, \sqrt{-c})$ e $(\sqrt{-c}, +\infty)$, per $c < 0$.

La soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = -\frac{1}{x^2-1}$, $-1 < x < 1$.

2.

$$\begin{cases} y' = 3t(t-2) \cdot \frac{1+y^2}{y} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Soluzione: $y = \sqrt{2e^{2t^3-6t^2+4} - 1}$, definita nel più ampio intervallo contenente 1 e tale che $2e^{2t^3-6t^2+4} - 1 > 0$.

3.

$$x' = t(1 + \frac{1}{x}).$$

Soluzione: Non si riesce ad esplicitare la soluzione, che quindi resta definita in modo implicito:

$$x(t) - \log|x(t) + 1| = \frac{t^2}{2} + c.$$

4.

$$\begin{cases} y' = e^{x-y} \\ y(0) = a \end{cases} \qquad a \in R.$$

Soluzione: se $a \geq 0$, la soluzione è $y(x) = \log(e^x + e^a - 1)$ definita su R; altrimenti, se $a < 0$, la soluzione è $y(x) = \log(e^x + e^a - 1)$ definita sull'intervallo $(\log(1 - e^a), +\infty)$.

5.

$$\begin{cases} y' + 3t^2 y = e^{-t^3} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Soluzione: $y(t) = (1 + t)e^{-t^3}$, $t \in R$.

6.

$$\begin{cases} y' + y \sin t = e^{\cos t} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Soluzione: $y(t) = (t - 1)e^{\cos t}$, $t \in R$.

7.
$$\begin{cases} y' = \frac{y}{t} + t\cos t \\ y(\frac{\pi}{2}) = \pi \end{cases}$$

Soluzione: $y(t) = t(1+\sin t)$, $t \in (0,+\infty)$.

8.
$$\begin{cases} y' + \frac{y}{x} + \sqrt{2-x} = 0 \\ y(1) = 4 \end{cases}$$

Soluzione: $y(x) = \frac{2}{x}[\frac{23}{15} + \frac{2}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}(2-x)^{\frac{5}{2}}]$, $x \in (0,2]$.

9. Trovare l'integrale generale di $y' + g'(t)y = g'(t)g(t)$, dove $g \in C^1(I)$.

   Soluzione: $y(t) = ce^{-g(t)} + g(t) - 1$, $t \in I$.