Risolvere i problemi di Cauchy o trovare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali del II ordine lineari a coefficienti costanti:

1.
$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

2.
$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

3.
$$\begin{cases} y'' + 2y' + 3y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

4.
$$y'' - 5y' + 6y = 5$$

5.
$$y'' - 2y' + y = x^3 - 6x^2$$

6.
$$\begin{cases} y'' - 6y' = x^2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

7.
$$y'' + 2y' + 3y = 2e^{3x}$$

8.
$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$$

9.
$$y'' + 2y' + y = 6\sin(2x)$$

10.
$$\begin{cases} y'' + y = 2\sin x \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

11.
$$y'' - y = (x+1)e^x$$

12.
$$y'' + y = x\sin x$$

13.
$$\begin{cases} y'' + 2y' = e^x + e^{-2x} \\ y(0) = \frac{1}{3} \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

14.
$$y'' - 2y' + y = \frac{12e^x}{x^3}$$

15.

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}.$$

Soluzioni:

1. L'equazione caratteristica associata al problema di Cauchy è $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, che ammette due radici reali distinte: $\lambda_{1,2} = 2, 3$. L'integrale generale è combinazione lineare delle due soluzioni indipendenti e^{2x} e e^{3x}:
$$y(x) = Ae^{2x} + Be^{3x};$$
$$y'(x) = 2Ae^{2x} + 3Be^{3x}.$$
Imponendo le condizioni iniziali otteniamo
$$\begin{cases} y(0) = A + B = 0 \\ y'(0) = 2A + 3B = 1 \end{cases},$$
da cui $A = -1$ e $B = 1$. In conclusione, la soluzione è
$$y(x) = -e^{2x} + e^{3x}.$$

2. L'equazione caratteristica associata all'equazione è $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$, che ammette due radici reali coincidenti: $\lambda_{1,2} = 3$. L'integrale generale è combinazione lineare delle due soluzioni indipendenti e^{3x} e xe^{3x}:
$$y(x) = Ae^{3x} + Bxe^{3x}.$$

3. L'equazione caratteristica associata al problema di Cauchy è $\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$, che ammette due radici complesse: $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}i$. L'integrale generale è combinazione lineare delle due soluzioni indipendenti $e^{-x}\cos(\sqrt{2}x)$ e $e^{-x}\sin(\sqrt{2}x)$:
$$y(x) = e^{-x}[A\cos(\sqrt{2}x) + B\sin(\sqrt{2}x)];$$
$$y'(x) = e^{-x}[(-A + \sqrt{2}B)\cos(\sqrt{2}x) + (-\sqrt{2}A - B)\sin(\sqrt{2}x)].$$
Imponendo le condizioni iniziali otteniamo
$$\begin{cases} y(0) = A = 1 \\ y'(0) = -A + \sqrt{2}B = 2 \end{cases},$$
da cui $A = 1$ e $B = \frac{3}{\sqrt{2}}$. In conclusione, la soluzione è
$$y(x) = e^{-x}[\cos(\sqrt{2}x) + \frac{3\sqrt{2}}{2}\sin(\sqrt{2}x)].$$

4. L'integrale generale dell'equazione completa è la somma dell'integrale generale dell'equazione omogenea e di una soluzione particolare dell'equazione completa. L'integrale generale dell'equazione omogenea è
$$z(x) = Ae^{2x} + Be^{3x};$$
utilizzando il metodo di somiglianza, cerco una soluzione particolare dell'equazione completa della forma $\overline{y}(x) = C$: sostituendo $\overline{y}$ e le sue derivate nell'equazione, ottengo $C = \frac{5}{6}$. In conclusione, la soluzione è
$$y(x) = z(x) + \overline{y}(x) = Ae^{2x} + Be^{3x} + \frac{5}{6}.$$

5. L'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$z(x) = Ae^x + Bxe^x.$$

Utilizzando il metodo di somiglianza, dopo aver osservato che $\lambda = 0$ non è radice dell'equazione caratteristica, cerco una soluzione particolare dell'equazione completa della forma

$$\overline{y}(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d :$$

sostituendo $\overline{y}$ e le sue derivate nell'equazione, ottengo $a = 1$, $b = 0$, $c = -6$ e $d = -12$. In conclusione, la soluzione è

$$y(x) = Ae^x + Bxe^x + x^3 - 6x - 12.$$

6. L'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$z(x) = A + Be^{6x}.$$

Utilizzando il metodo di somiglianza, dopo aver osservato che $\lambda = 0$ è radice di molteplicità 1 dell'equazione caratteristica, cerco una soluzione particolare dell'equazione completa della forma

$$\overline{y}(x) = x(ax^2 + bx + c) :$$

sostituendo $\overline{y}$ e le sue derivate nell'equazione, ottengo $a = -\frac{1}{18}$, $b = -\frac{1}{36}$ e $c = -\frac{1}{108}$. L'integrale generale è:

$$y(x) = A + Be^{6x} - \frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{36}x^2 - \frac{1}{108}x.$$

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene $A = \frac{1}{648}$ e $B = -\frac{1}{648}$.

7. L'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$z(x) = e^{-x}[A\cos(\sqrt{2}x) + B\sin(\sqrt{2}x)].$$

Utilizzando il metodo di somiglianza, dopo aver osservato che $\lambda = 3$ non è radice dell'equazione caratteristica, cerco una soluzione particolare dell'equazione completa della forma

$$\overline{y}(x) = Ce^{3x} :$$

sostituendo $\overline{y}$ e le sue derivate nell'equazione, ottengo $C = \frac{1}{9}$. In conclusione, la soluzione è

$$y(x) = e^{-x}[A\cos(\sqrt{2}x) + B\sin(\sqrt{2}x)] + \frac{1}{9}e^{3x}.$$

8. L'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$z(x) = Ae^{2x} + Bxe^{2x}.$$

Utilizzando il metodo di somiglianza, dopo aver osservato che $\lambda = 2$ è radice dell'equazione caratteristica di molteplicità 2, cerco una soluzione particolare dell'equazione completa della forma

$$\overline{y}(x) = Cx^2 e^{2x} :$$

sostituendo $\overline{y}$ e le sue derivate nell'equazione, ottengo $C = \frac{1}{2}$. In conclusione, la soluzione è

$$y(x) = (A + Bx + \frac{1}{2}x^2)e^{2x}.$$

9. L'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$z(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x}.$$

Utilizzando il metodo di somiglianza, dopo aver osservato che $\lambda = \pm 2i$ non sono radici dell'equazione caratteristica, cerco una soluzione particolare dell'equazione completa della forma

$$\overline{y}(x) = \alpha \cos(2x) + \beta \sin(2x) :$$

sostituendo $\overline{y}$ e le sue derivate nell'equazione, ottengo $\alpha = -\frac{24}{25}$ e $\beta = -\frac{18}{25}$. In conclusione, la soluzione è

$$y(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x} - \frac{24}{25}\cos(2x) - \frac{18}{25}\sin(2x).$$

10. L'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$z(x) = A\cos x + B\sin x.$$

Utilizzando il metodo di somiglianza, dopo aver osservato che $\lambda = \pm i$ sono radici dell'equazione caratteristica, cerco una soluzione particolare dell'equazione completa della forma

$$\overline{y}(x) = x(\alpha \cos x + \beta \sin x) :$$

sostituendo $\overline{y}$ e le sue derivate nell'equazione, ottengo $\alpha = -1$ e $\beta = 0$. L'integrale generale è

$$y(x) = A\cos x + B\sin x - x\cos x.$$

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene $A = 3$ e $B = 0$. In conclusione, la soluzione è

$$y(x) = (3 - x)\cos x.$$

11. L'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$z(x) = Ae^{x} + Be^{-x}.$$

Utilizzando il metodo di somiglianza, dopo aver osservato che $\lambda = 1$ è radice di molteplicità 1 dell'equazione caratteristica, cerco una soluzione particolare dell'equazione completa della forma

$$\overline{y}(x) = x(ax + b)e^{x} :$$

sostituendo $\overline{y}$ e le sue derivate nell'equazione, ottengo $a = b = \frac{1}{4}$. In conclusione, la soluzione è

$$y(x) = Ae^x + Be^{-x} + \frac{1}{4}x(x+1)e^x.$$

12. L'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$z(x) = A\cos x + B\sin x.$$

Utilizzando il metodo di somiglianza, dopo aver osservato che $\lambda = \pm i$ sono radici dell'equazione caratteristica, cerco una soluzione particolare dell'equazione completa della forma

$$\overline{y}(x) = x[(ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x]:$$

sostituendo $\overline{y}$ e le sue derivate nell'equazione, ottengo $a = -\frac{1}{4}$, $b = c = 0$ e $d = \frac{1}{4}$. In conclusione, la soluzione è

$$y(x) = A\cos x + B\sin x - \frac{1}{4}x^2\cos x + \frac{1}{4}x\sin x.$$

13. L'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$z(x) = A + Be^{-2x}.$$

Una soluzione particolare dell'equazione $y'' + 2y' = e^x$ è

$$\overline{y}_1(x) = \frac{1}{3}e^x.$$

Una soluzione particolare dell'equazione $y'' + 2y' = e^{-2x}$ è

$$\overline{y}_2(x) = -\frac{1}{2}xe^{-2x}.$$

L'integrale generale è

$$y(x) = z(x) + \overline{y}_1(x) + \overline{y}_2(x) = A + Be^{-2x} + \frac{1}{3}e^x - \frac{1}{2}xe^{-2x}.$$

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene $A = \frac{1}{12}$ e $B = -\frac{1}{12}$.

14. L'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$z(x) = Ae^x + Bxe^x.$$

Utilizzando il metodo di variazione delle costanti, cerco una soluzione particolare dell'equazione completa della forma

$$\overline{y}(x) = A(x)e^x + B(x)xe^x,$$

dove $A(x)$ e $B(x)$ sono primitive delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} A'(x)e^x + B'(x)xe^x = 0 \\ A'(x)e^x + B'(x)e^x + B'(x)xe^x = \frac{12e^x}{x^3} \end{cases},$$

per esempio $A(x) = \frac{12}{x}$ e $B(x) = -\frac{6}{x}$. In conclusione, la soluzione è

$$y(x) = (A + Bx + \frac{6}{x})e^x.$$

15. L'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$z(x) = A\cos x + B\sin x.$$

Utilizzando il metodo di variazione delle costanti, cerco una soluzione particolare dell'equazione completa della forma

$$\overline{y}(x) = A(x)\cos x + B(x)\sin x,$$

dove $A(x)$ e $B(x)$ sono primitive delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} A'(x)\cos x + B'(x)\sin x = 0 \\ -A'(x)\sin x + B'(x)\cos x = \frac{1}{\cos x} \end{cases},$$

per esempio $A(x) = \log|\cos x|$ e $B(x) = x$. In conclusione, la soluzione è

$$y(x) = A\cos x + B\sin x + \cos x\log|\cos x| + x\sin x.$$