Esercizi di Analisi II

Anno Accademico 2008-2009

Equazioni differenziali

1. Si determini l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y^{iv} - 3y''' = x + 1\,.$$

2. Risolvere l'equazione differenziale

$$y''' - y' = (3 - x) \cdot e^{2x}\,.$$

3. Risolvere il seguente problema di Cauchy, dove α è un numero reale:

$$\begin{cases} y'' - y' = \alpha x + 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

4. Si risolva il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = 2\sin x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

5. Risolvere il seguente sistema di equazioni differenziali nelle incognite y e z:

$$\begin{cases} y' + y - z = e^{x} \\ z' - 4y + z = x + 3 \end{cases}$$

6. Risolvere il seguente problema ai limiti:

$$\begin{cases} xy'' + y' = \dfrac{2}{x} \cdot \log x \\ y(1) = 0 \\ y(e) = 1 \end{cases}$$

7. Al variare del parametro reale α, si studi il seguente problema ai limiti:

$$\begin{cases} y'' + 2y' + \alpha y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

8. Integrare l'equazione differenziale

$$\cos y \cdot y' = \cos x \cdot (2\sin y - \sin^2 x)\,.$$

9. Integrare l'equazione differenziale

$$x(1 - xy + x^2y^2)y' - y(xy - 1) = 0\,.$$

10. Determinare gli autovalori e le autosoluzioni del seguente problema ai limiti:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = 0 \\ 4 \cdot y(0) + \lambda \cdot y'(0) = 0 \\ \lambda \cdot y(\pi) + y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

11. Integrare l'equazione differenziale

$$\lambda^2 y'' - 2\lambda^2 y' + (1 + \lambda^2)y = 0\,,$$

dove $\lambda > 0$ è un numero reale.

Determinare poi i valori di λ per i quali esistono linee integrali non coincidenti con l'asse x che ammettono tangente orizzontale nei punti $x = 0$ e $x = \pi/2$; scrivere l'equazione di tali linee.

12. Sia dato il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{x} + \sqrt{x} \cdot y^\alpha \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

(i) Per ogni $\alpha \in (0, +\infty)$, determinare l'insieme delle coppie (x_0, y_0) per le quali sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità della soluzione;

(ii) posto $\alpha = 1/2$, $x_0 = 1$ e $y_0 = 1$, determinare, se esistono, le soluzioni del problema, precisandone il dominio;

(iii) posto $\alpha = 1/2$, $x_0 = 1$ e $y_0 = 0$, determinare, se esiste, una soluzione del problema, specificandone il dominio;

(iv) con i dati del punto precedente, stabilire se esistono due soluzioni del problema definite nell'intervallo $(0, +\infty)$.

13. Si consideri il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y \cdot y'' = 2{y'}^2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = \alpha \end{cases}$$

(i) Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, si studi l'esistenza e l'unicità della soluzione;

(ii) nel caso $\alpha = 0$, determinare tutte le soluzioni del problema, precisandone il dominio;

(iii) per $\alpha = 1$, trovare tutte le soluzioni del problema, specificandone il dominio.

14. Siano γ e δ due numeri reali: dire se il problema

$$\begin{cases} xy' = y + e^x - 1 \\ y(0) = \gamma \\ y'(0) = \delta \end{cases}$$

ammette soluzioni sviluppabili in serie di McLaurin.

15. Trovare, se esistono, le soluzioni sviluppabili in serie di McLaurin del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x^2 y'' + y = e^{-x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

16. Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' + xy' + y + 1 = 0\,.$$

Supponendo $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, trovare un'espressione esplicita dei coefficienti a_n.

Determinare poi tutte le soluzioni sviluppabili in serie di McLaurin del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + xy' + y + 1 = 0 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$