Analisi II
Serie numeriche, serie di funzioni, serie di potenze

1. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ una serie a termini positivi tale che la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia decrescente: allora tale serie converge se e solo se è convergente la serie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot x_{2^n}$.

2. Al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, studiare il carattere della serie
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\log n)^{\beta}} .$$

3. Discutere il carattere delle seguenti serie numeriche:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n} \tag{1}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} \tag{2}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{5^n} \tag{3}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} (\log\alpha)^n \quad \alpha \in \,]0,+\infty[\tag{4}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \tag{5}$$
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{n/2}} \tag{6}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2} \tag{7}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \sin\frac{1}{n} \tag{8}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}+2} \tag{9}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\cdot\cos(\pi n)}{n^3+3} \tag{10}$$

4. Determinare il carattere della seguente serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$
dove
$$x_n := \begin{cases} 1/n & \text{se } n \text{ dispari} \\ -1/n^2 & \text{se } n \text{ pari.} \end{cases}$$

5. Determinare gli insiemi di convergenza puntuale, uniforme ed assoluta della seguente serie di funzioni
$$\sum_{n=0}^{\infty} (\arctan(x/n))^n \mathbb{1}_{[-n,n]}(x),$$
dove
$$\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

6. Determinare gli insiemi di convergenza puntuale, uniforme ed assoluta della seguente serie di funzioni
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}.$$

7. Determinare gli insiemi di convergenza puntuale, uniforme, assoluta e totale della serie
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n-\sqrt{n}}.$$

8. Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n(n^2+2)}.$$

9. Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{x^{3n}}{3^n}.$$

10. Trovare il raggio e l'insieme di convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^\alpha} \quad (\alpha > 0).$$

11. Determinare il raggio e l'insieme di convergenza della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}.$$

12. Determinare il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{3^n+1} .$$

13. Sviluppare in serie di potenze la funzione

$$f(x) = \frac{2x-8}{x^2-8x+12} ,$$

precisando il raggio di convergenza.

Calcolare poi $f^{(n)}(0)$ per ogni $n \geq 0$.

14. Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n .$$

15. Studiare la convergenza puntuale, assoluta ed uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-1/n^2)^{n^2}}{n\sqrt{n}} x^n .$$

16. Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^{\sqrt{n}} x^n$$

al variare del parametro reale $a \geq 0$.

17. Calcolare

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n .$$

18. Studiare la convergenza della successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dove $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ è definita ponendo

$$f_n(x) := \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} .$$

19. Studiare la convergenza della successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dove

$$f_n(x) = \frac{nx}{e^{nx}} \quad \forall x \in \mathbb{R} .$$

20. Studiare la convergenza della successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dove

$$f_n(x) = \frac{1+nx}{1+n^2x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R} .$$

21. Si determini l'insieme A di convergenza puntuale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(e^{-nx^2}\right).$$

Si provi che su A non può esserci convergenza uniforme e si individuino dei sottoinsiemi di A sui quali la convergenza è uniforme.

22. Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^2+n}{n^2}.$$

Studiare la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie.

Indicata con $F(x)$ la funzione somma della serie, discutere la continuità e la derivabilità di $F(x)$.

Cenni di soluzioni

1. In progress
2. In progress
3. In progress
4. Si osservi che se definiamo $c := \sum_i 1/4i^2$ (serie che chiaramente converge) allora

$$S_{2n+1} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2i+1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i^2} \geq \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2i+1} - c$$

e chiaramente, essendo $1/(2n+1) \sim 1/2n$ (la quale diverge) si ha che $S_{2n+1} \to +\infty$ se $n \to +\infty$ quindi la serie non converge.

Si potrebbe inoltre osservare che

$$S_{2n+2} \geq \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2i+1} - c$$

pertanto si conclude che la serie, non solo non converge, ma diverge a $+\infty$.

5. Si osservi che

$$|\arctan(x/n)\mathbb{1}_{[-n,n]}(x)| \leq \arctan(1) = \frac{\pi}{4} < 1$$

pertanto il termine n-esimo della serie si maggiora in modulo con $(\pi/4)^n$; dal criterio di Weierstrass si ha la convergenza (totale) uniforme, assoluta e puntuale della serie su $\mathbb{R}$.

6. La serie non converge se $x = 1$, mentre $0 \leq 1/(1+n^2x^2) \leq 1/n^2x^2$ per cui la serie converge assolutamente e puntualmente in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. La convergenza uniforme in un insieme A implica la convergenza puntuale nei punti di accumulazione di A (Teorema del doppio limite), pertanto 0 non può essere di accumulazione per A in caso di convergenza uniforme su A. Viceversa se 0 non è di accumulazione per A, si ha che $A \subseteq (-\infty, -\epsilon] \cup [\epsilon, \infty)$ per qualche $\epsilon > 0$, pertanto $0 \leq 1/(1+x^2n^2) \leq 1/(1+n^2\epsilon^2)$ per ogni $x \in A$ da cui si ha la convergenza (totale) uniforme in A in virtù del criterio di Weierstrass.

7. Raggio di convergenza 1. Convergenza puntuale in $[-1,1)$ (si utilizzi il criterio di Leibniz in -1 dopo aver mostrato che $n-\sqrt{n}$ decresce. Convergenza assoluta in $(-1,1)$. Convergenza uniforme (e totale) in A se e solo se $A \subseteq [-1+\epsilon, 1-\epsilon)$ per qualche $\epsilon > 0$.

8. Raggio di convergenza 2. Convergenza puntuale, assoluta ed uniforme (anche totale) in $[-2,2]$ (per esempio, utilizzare il criterio di Weierstrass).

9. In progress

10. Raggio di convergenza 1 (per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$).

    - $0 < \alpha \leq 1$. Convergenza puntuale in $[-1,1)$, assoluta in $(-1,1)$ ed uniforme (e totale) in A se e solo se $A \subseteq [-1+\epsilon, 1-\epsilon)$ per qualche $\epsilon > 0$.
    - $1 < \alpha$. Convergenza puntuale, assoluta ed uniforme (e totale) in $[-1,1]$.

11. Possiamo vedere questa serie $\sum_n f_n(x)$ come una serie di potenze con coefficienti

$$a_i := \begin{cases} 1 & \text{se } i = n! \text{ per qualche } n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

oppure come serie di funzioni generica. Chiaramente $0 \leq f_n(x) \leq x^n$, pertanto sicuramente converge puntualmente ed assolutamente in $(-1,1)$ e uniformemente in $[-1+\epsilon, 1-\epsilon]$. D'altro canto $f_n(\pm 1) \not\to 0$ se $n \to \infty$, pertanto non converge puntualmente in $\{x : |x| \geq 1\}$. Il raggio di convergenza è 1.

12. In progress

13. Si osservi che

$$\frac{2x-8}{x^2-8x+12} = \frac{2x-8}{(x-6)(x-2)} = \frac{1}{x-6} + \frac{1}{x-2}$$

da cui, essendo

$$\frac{1}{x-6} = -\frac{1}{6}\frac{1}{1-(x/6)} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(x/6)^n$$
$$\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-(x/2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(x/2)^n$$

di raggio rispettivamente 6 e 2, allora

$$\frac{2x-8}{x^2-8x+12} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(x/2)^n - \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(x/6)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{6^{n+1}})x^n$$

di raggio di convergenza pari a 2. Infine

$$f^{(n)}(0) = n!a_n = -n!(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{6^{n+1}}).$$

14. Ricordiamo la formula di De Moivre-Stirling $n! \sim (n/e)^n\sqrt{2\pi n}$. Inoltre se $a_n \sim b_n$ (entrambe di segno definitivamente positivo) e $|k_n| \leq M$ ogni $n \in \mathbb{N}$ allora $a_n^{k_n} \sim b_n^{k_n}$. Pertanto $\sqrt[n]{n!/n^n} \sim \sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}/e^n} \to 1/e$, da cui $R = e$. Ai bordi si ha

$$n!(\pm e)^n/n^n \sim (\pm 1)^n\sqrt{2\pi n} \not\to 0$$

quindi non c'è convergenza. C'è convergenze puntuale ed assoluta in $(-1, 1)$ e convergenza uniforme in ogni insieme $A \subseteq [-1+\epsilon, 1-\epsilon]$ per qualche $\epsilon > 0$.

15. Calcoliamo

$$\sqrt[n]{\frac{(1-1/n^2)^{n^2}}{n\sqrt{n}}} = \frac{(1-1/n^2)^n}{n^{3/(2n)}} \to 1,$$

da cui $R = 1$. Ai bordi si deve calcolare

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\pm 1)^n\frac{(1-1/n^2)^{n^2}}{n\sqrt{n}}$$

ora

$$\left|(\pm 1)^n\frac{(1-1/n^2)^{n^2}}{n\sqrt{n}}\right| = \frac{(1-1/n^2)^{n^2}}{n\sqrt{n}} \sim \frac{e}{n^{3/2}}$$

da cui si ha covergenza. Pertanto la serie converge puntualmente, assolutamente, uniformemente (e totalmente) in $[-1, 1]$.

16. Se $a = 0$ chiaramente la serie è quella nulla. Se $a > 0$ si ha che $\lim_n \sqrt[n]{a^{\sqrt{n}}} = \lim_n a^{1/\sqrt{n}} = 1$ pertanto il raggio di convergenza della serie è 1. Ai bordi si hanno le due serie $\sum_n (\pm 1)^n a^{\sqrt{n}}$. Se $a \geq 1$ il termine n-esimo non tende a 0 quindi non c'è convergenza. Viceversa se $a < 1$ allora si ha che

$$0 \leq a^{\sqrt{n}} = \frac{a^{\sqrt{n}}}{1/n^2}\frac{1}{n^2} \leq \frac{M}{n^2}$$

poiché $a^{\sqrt{n}}n^2 \to 0$ se $n \to \infty$ e quindi è limitata. Quindi si ha convergenza, per il criterio di Weierstrass. Pertanto

- Se $a < 1$ si ha convergenza puntuale, assoluta, uniforme (e totale) su $[-1, 1]$.
- Se $a \geq 1$ si ha convergenza puntuale ed assoluta su $(-1, 1)$ ed uniforme (e totale) su ogni insieme $A \subseteq [-1+\epsilon, 1-\epsilon]$ per qualche $\epsilon > 0$.

17. Osserviamo che $\sum_n nx^n = x\sum_n nx^{n-1}$ nel senso che le due serie hanno lo stesso carattere e il limite, dove esiste, soddisfa questa uguaglianza. Ovviamente

$$\sum_n nx^{n-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_n x^n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

da cui

$$\sum_n nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

18. In progress

19. In progress
20. In progress
21. In progress
22. In progress