1. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{e^y - 1}{e^y(x-1)} \\ y(0) = \log 3 \end{cases}$$

2. Trovare l'integrale generale dell'equazione

$$\frac{y'}{\sqrt{y^2 - 2}} = \frac{e^x}{2y}.$$

3. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 4x^3 y + e^{x^4} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

specificando l'insieme di definizione della soluzione.

4. Trovare l'integrale generale dell'equazione

$$y' + \frac{2x}{1+x^2} y = 1 + x.$$

5. Risolvere

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = e^{3x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

6. Risolvere

$$y'' - y = \frac{1}{1+e^x}$$

utilizzando il metodo di variazione delle costanti.

7. Calcolare, giustificandone l'esistenza, il seguente integrale:

$$\int\int_D y dxdy,$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y - x^2 \geq 0, y - |x| \leq 0\}$.

8. Calcolare

$$\int\int_D \frac{\log\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} dxdy,$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$.

9. Disegnare il dominio

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 4, x^2 + y^2 + 2x - 2y \leq 0, -x \leq y \leq -\sqrt{3}x\}$$

e calcolare

$$\int\int_D \frac{1}{y - x - \sqrt{x^2+y^2}} dxdy.$$

Cenni di soluzione:

1. L'equazione è del primo ordine a variabili separabili, cioè della forma $y' = a(x)b(y)$. $a(x) = \frac{1}{x-1}$ è continua in $(-\infty, 1)$ e in $(1, +\infty)$, $b(y) = \frac{e^y - 1}{e^y}$ è continua e derivabile con continuità $\forall y \in \mathbf{R}$: poiché la condizione è $y(0) = \log 3$, la soluzione sarà definita al più sull'intervallo $(-\infty, 1)$. L'unica soluzione costante è $y(x) = 0$; per il teorema di esistenza e unicità, nessuna altra soluzione si annulla in alcun punto, quindi è possibile separare le variabili e procedere con l'integrazione:

$$\int \frac{y'(x)e^{y(x)}}{e^{y(x)} - 1} dx = \int \frac{1}{x-1} dx$$

$$\log[e^{y(x)} - 1] = \log(1 - x) + c$$

da cui si ricava l'integrale generale

$$y(x) = \log[c(1 - x) + 1].$$

Sostituendo la condizione iniziale si ottiene $y(x) = \log(3 - 2x)$.

2. Innanzitutto affinché l'equazione abbia senso dev'essere $y^2 - 2 > 0$, quindi le soluzioni saranno sempre maggiori di $\sqrt{2}$ o minori di $-\sqrt{2}$.

Dopo aver operato come nell'esercizio precedente, si giunge all'equazione

$$\sqrt{y^2(x) - 2} = \frac{e^x}{2} + c.$$

Per elevare al quadrato occorre porre $\frac{e^x}{2} + c > 0$, che è vera $\forall x \in \mathbf{R}$ se $c \geq 0$, mentre se $c < 0$ la disequazione è valida solo per $x \in (\log(-2c), +\infty)$.

Esplicitando $y(x)$ otteniamo che le soluzioni dell'equazione differenziale hanno la forma

$$y(x) = \pm\sqrt{\left(\frac{e^x}{2} + c\right)^2 + 2}$$

e sono definite su $\mathbf{R}$ se $c \geq 0$, su $(\log(-2c), +\infty)$ se $c < 0$.

3. Si tratta di un'equazione differenziale lineare del I ordine, con coefficienti $a(x) = 4x^3$ e $b(x) = e^{x^4}$ continui su $\mathbf{R}$: esiste una e una sola soluzione al problema da Cauchy, definita su $\mathbf{R}$.

L'equazione omogenea ha soluzione

$$z(x) = ce^{A(x)} = ce^{x^4},$$

dove $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$. Una soluzione particolare dell'equazione completa è della forma

$$\overline{y}(x) = c(x)e^{x^4},$$

dove

$$c(x) = \int b(x)e^{-A(x)} dx = x.$$

La soluzione generale quindi è

$$y(x) = (c + x)e^{x^4};$$

sostituendo la condizione iniziale si ricava $c = 2$.

4. La soluzione è
$$y(x)=\frac{1}{1+x^2}\left(c+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right),\quad x\in\mathbf{R}.$$

5. La soluzione è
$$y(x)=-e^{2x}+(1+x)e^{3x}.$$

6. La soluzione dell'equazione omogenea è
$$z(x)=Ae^x+Be^{-x}.$$
Si cerca una soluzione particolare del tipo
$$\overline{y}(x)=A(x)e^x+B(x)e^{-x},$$
dove $A(x)$ e $B(x)$ sono primitive delle soluzioni del sistema
$$\begin{cases} A'(x)e^x+B'(x)e^{-x}=0 \\ A'(x)e^x-B'(x)e^{-x}=\frac{1}{1+e^x} \end{cases},$$
per esempio
$$A(x)=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}e^{-x}+\frac{1}{2}\log(1+e^x)$$
$$B(x)=-\frac{1}{2}\log(1+e^x).$$
In conclusione, la soluzione è
$$y(x)=Ae^x+Be^{-x}-\frac{1}{2}xe^x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^x\log(1+e^x)-\frac{1}{2}e^{-x}\log(1+e^x).$$

7. D è y-semplice e f è continua su D, quindi f è integrabile su D. $f(x,y)=y$ è pari rispetto alla variabile x e D è simmetrico rispetto all'asse y, quindi
$$\int\int_D ydxdy=2\int\int_{D_1}ydxdy,$$
dove $D_1=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2:0\le x\le 1, x^2\le y\le x\}$.
Si ha
$$\int\int_D ydxdy=2\int_0^1\left(\int_{x^2}^x ydy\right)dx=\ldots=\frac{2}{15}.$$

8. D è una semicorona circolare e la funzione integranda è a simmetria radiale: è chiaro che conviene passare alle coordinate polari. L'insieme di integrazione diventa un rettangolo:
$$E=\{(\rho,\vartheta)\in\mathbf{R}^2:1\le\rho\le 2, 0\le\vartheta\le\pi\}.$$
$$\int\int_D\frac{\log\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}dxdy=\int\int_E\frac{\log\rho}{\rho^2}\cdot\rho\cdot d\rho d\vartheta$$
$$=\left(\int_1^2\frac{\log\rho}{\rho}d\rho\right)\left(\int_0^\pi d\vartheta\right)=\ldots=\frac{\pi}{2}\log^2 2.$$

9. Passando alle coordinate polari, l'insieme di integrazione diventa

$$E = \{(\rho, \vartheta) \in \mathbf{R}^2 : \frac{2}{3}\pi \le \vartheta \le \frac{3}{4}\pi, 2 \le \rho \le 2(\sin\vartheta - \cos\vartheta)\}.$$

E è ρ-semplice e $f(\rho, \vartheta)$ è continua, quindi è integrabile su E.

Si ottiene

$$\int\int_D \frac{1}{y - x - \sqrt{x^2+y^2}} dxdy = \int\int_E \frac{1}{\rho\sin\vartheta - \rho\cos\vartheta - \rho} \cdot \rho \cdot d\rho d\vartheta$$

$$= \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} \left(\int_2^{2(\sin\vartheta - \cos\vartheta)} \frac{1}{\sin\vartheta - \cos\vartheta - 1} d\rho \right) d\vartheta = \ldots = \frac{\pi}{6}.$$