

Esercizi di Analisi II

Anno Accademico 2008-2009

Esercitazione supplementare del 14 luglio 2009

1. Si studi la convergenza puntuale e uniforme delle seguenti successioni di funzioni nell'insieme E indicato:

(a) $f_n(x) = n \cdot \arctan \frac{x}{n}, \quad E = [-\pi, \pi];$

(b) $f_n(x) = n \cdot (\sqrt[n]{x} - 1), \quad E = (0, +\infty).$

2. Studiare la convergenza delle seguenti serie di potenze:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} \cdot x^{2n};$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2};$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(n+2)!}.$

3. Trovare lo sviluppo in serie di McLaurin della funzione

$$f(x) = \frac{3x-7}{x^2-4x+3},$$

precisandone il raggio di convergenza.

4. Calcolare lo sviluppo in serie di Fourier della funzione, periodica di periodo 2π , definita come segue nell'intervallo $[-\pi, \pi]$:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } -\pi/2 \leq x \leq \pi/2; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Discutere la convergenza della serie di Fourier associata a $f(x)$.

5. Trovare lo sviluppo in serie di Fourier della funzione $|\cos x|$.
6. Applicando l'identità di Parseval allo sviluppo

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{3^2} \cos(3x) + \frac{1}{5^2} \cos(5x) + \dots \right),$$

dedurre che

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

7. Studiare i massimi e i minimi delle seguenti funzioni:

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + x$;

(b) $g(x, y, z) = x^2z + yz + xy$.

8. Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 + \frac{|x|y^6}{x^6 + y^6} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0); \\ k & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(i) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare l'insieme di continuità di f ;

(ii) al variare di $k \in \mathbb{R}$, determinare l'insieme di differenziabilità di f ;

(iii) per $k = 1$, trovare gli eventuali punti di massimo e minimo, relativi e assoluti, di f .

9. Studiare i massimi e i minimi, relativi e assoluti, della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + y^2 - 1$$

nell'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

10. Trovare il massimo e il minimo della funzione

$$f(x, y) = x + y - \sqrt{6} \cdot z$$

sulla sfera di centro l'origine e raggio 1.