1. Trovare i punti critici e i punti estremali della funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{3}y^3 - x^2y + x^4$$

e determinare la loro natura.

2. Trovare i punti critici e i punti estremali della funzione

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz$$

e determinare la loro natura.

3. Trovare i punti critici e i punti estremali della funzione

$$f(x,y) = (x + 3y^2)(x + y^2)$$

e determinare la loro natura.

4. Determinare i punti di massimo e di minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = e^{-xy}$$

in

$$D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}.$$

5. Dire se la forma differenziale

$$\omega(x,y) = (y^2 - x^3y^3)dx + (2xy - \frac{3}{4}x^4y^2)dy$$

è chiusa e se è esatta. In caso affermativo, calcolare la primitiva.

6. Dire se la forma differenziale

$$\omega(x,y) = (y^2 - x^2)dx + x^2ydy$$

è chiusa e se è esatta. In caso affermativo, calcolare la primitiva.

7. Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$$\overrightarrow{F}(x,y) = y^2\overrightarrow{i} + (y^2 - x^2)\overrightarrow{j}$$

lungo $\partial^+ D$, dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq y \leq 2, y^2 \leq x \leq 4\}.$$

8. Dato il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = 2xy^2\overrightarrow{i} + 2x^2y\overrightarrow{j} + z^2(x^2 + y^2)\overrightarrow{k},$$

calcolare il flusso di $\overrightarrow{F}$ uscente dalla regione

$$E = \{x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 2\}.$$

Cenni di soluzione:

1. I punti stazionari sono $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $(0,0)$.

   $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ sono punti di minimo, invece la natura del punto $(0,0)$ è dubbia poiché la matrice hessiana in tale punto è nulla: tuttavia, restringendoci agli assi cartesiani osserviamo che $f(x,0) = x^4 \geq f(0,0) = 0 \ \ \forall x \in \mathbf{R}$, mentre $f(0,y) = \frac{1}{3}y^3 \geq 0$ solo per $y \geq 0$, quindi $(0,0)$ non è un punto estremale.

2. La funzione ammette un unico punto critico, l'origine. Il polinomio caratteristico associato alla matrice hessiana in $(0,0,0)$ è

   $$p(\lambda) = \det\left(Hf(0,0,0) - \lambda Id\right) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 10\lambda + 4;$$

   per la regola di Cartesio, esso ammette solo radici positive, quindi $(0,0,0)$ è punto di minimo relativo.

3. L'unico punto critico della funzione è l'origine degli assi. La matrice hessiana calcolata in $(0,0)$ è semidefinita positiva, quindi la natura del punto è dubbia. Tuttavia, studiando il segno della funzione f, ricaviamo facilmente che non esistono intorni dell'origine in cui f ha segno costante, quindi $(0,0)$ non è punto estremale.

4. Non ci sono punti stazionari appartenenti alla parte interna di D. Per il teorema di Weierstrass i punti di minimo e di massimo sono sul bordo di D.

   Passiamo allo studio della funzione su ∂D. Chiamiamo Λ la semicirconferenza unitaria destra e Γ il segmento che unisce i punti $(0,-1)$ e $(0,1)$. Su Λ ci sono due punti stazionari vincolati: $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, mentre la funzione ristretta a Γ è costante, quindi tutti i punti di Γ sono stazionari vincolati. Dal confronto dei valori della funzione nei vari punti stazionari otteniamo che $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ è punto di minimo e $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ è punto di massimo.

5. Utilizzando la notazione

   $$\omega(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy,$$

   osserviamo che

   $$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 2y - 3x^3y^2 = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y),$$

   quindi la forma differenziale è chiusa. Poiché il dominio $\mathbf{R}$ è semplicemente connesso, possiamo concludere che ω è esatta.

   Per il calcolo della primitiva cerchiamo una funzione $U : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ tale che $\frac{\partial U}{\partial x} = M$ e $\frac{\partial U}{\partial y} = N$. Dalla prima, integrando in x otteniamo

   $$U(x,y) = xy^2 - \frac{1}{4}x^4y^3 + c(y);$$

   derivando rispetto a y e uguagliando a $N(x,y)$, otteniamo $c'(y) = 0$, quindi

   $$U(x,y) = xy^2 - \frac{1}{4}x^4y^3 + c.$$

6. Si verifica facilmente che la forma differenziale non è chiusa, quindi non è nemmeno esatta.

7. ∂D è regolare a tratti, D è x-semplice e y-semplice e $\overrightarrow{F} \in C^1(D)$, quindi possiamo applicare la formula di Gauss-Green:

$$\int_{\partial D} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{t} \, ds = \int\int_D \nabla \times \overrightarrow{F} \, dxdy$$

$$= \int\int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy = \ldots = -\frac{168}{5}.$$

8. E è chiuso e limitato, ∂E è unione finita di superfici regolari e $\overrightarrow{F} \in C^1(E)$, quindi possiamo applicare il teorema della divergenza:

$$\Phi(\overrightarrow{F}, \partial E^+) = \int\int_{\partial E^+} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n} \, ds = \int\int\int_E \mathrm{div} \overrightarrow{F} \, dxdydz$$

$$= \int\int\int_E [2y^2 + 2x^2 + 2z(x^2 + y^2)] dxdydz.$$

Passando alle coordinate cilindriche si ricava che il valore dell'integrale triplo è 64π.